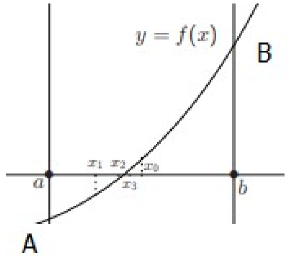
Méthodes numériques – Fiche de cours

1. Résolution d'équations

On suppose que l'équation $f(x)=0$ définie sur $[a;b]$ a pour solution $x=\alpha$; on construit une suite (x_n) convergent plus ou moins rapidement vers α selon la méthode utilisée

a. Méthode de dichotomie



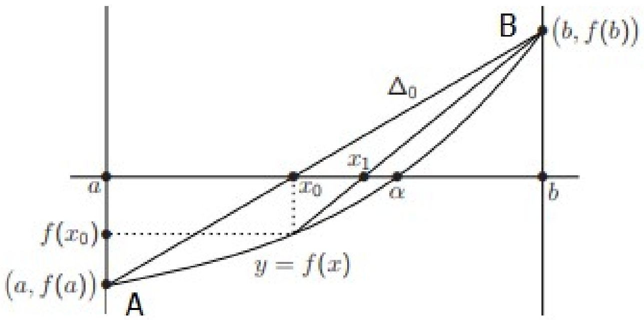
Algorithme

- On calcule $x_{n+1}=\dfrac{a+b}{2}$ abscisse du milieu de $[AB]$
- si $f(a)\cdot f(x_{n+1})<0$ alors $\alpha\in[a;x_{n+1}]$ (avec $b=x_{n+1}$)

sinon $\alpha\in[x_{n+1};b]$ (avec $a=x_{n+1}$)
- on réitère la méthode jusqu'à ce que $|x_{n+1}-x_n|\leq\epsilon$

Vitesse de convergence : pas très rapide

b. Méthode de Lagrange (sécante)

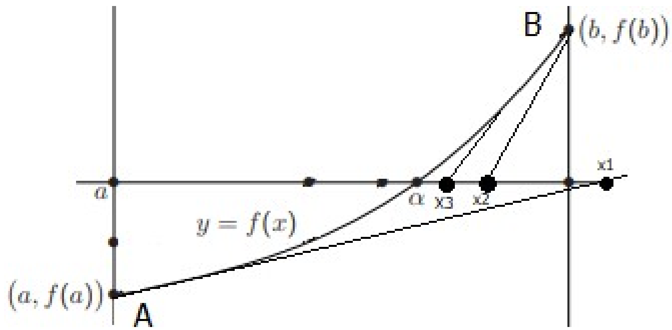


Algorithme

- On calcule $x_{n+1}=\dfrac{x_n\cdot f(b)-b\cdot f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}$ absicisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la sécante $[AB]$
- on réitère la méthode jusqu'à ce que $|x_{n+1}-x_n|\leq\epsilon$

Vitesse de convergence : assez rapide

c. Méthode de Newton (tangente)



Algorithme

- On calcule $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ abscisse du point d'intersection de la tangente l'axe des abscisses
- on réitère la méthode jusqu'à ce que $|x_{n+1}-x_n|\leq\epsilon$

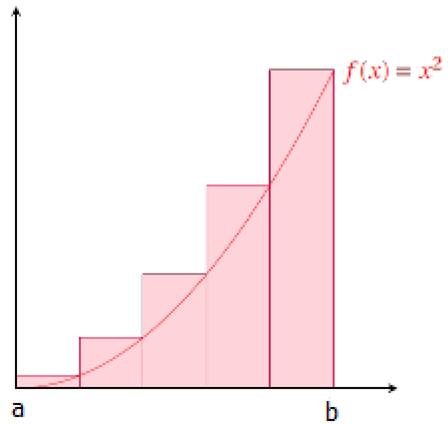
Vitesse de convergence : rapide

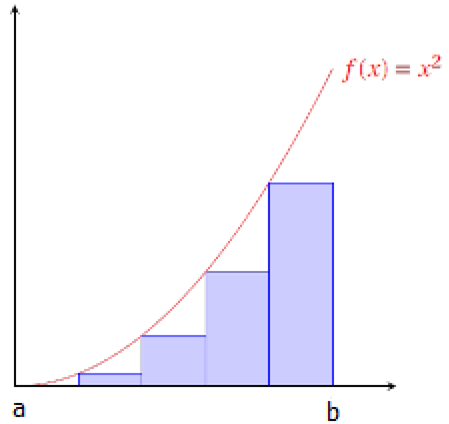
2. Intégration

On recherche une estimation de $\int_a^b f(x)\,dx$

a. Méthode des rectangles (gauche ou droite)

On calcule la surface des rectangles supérieurs et inférieurs et on procède à un encadrement de $\int_a^b f(x)\,dx$





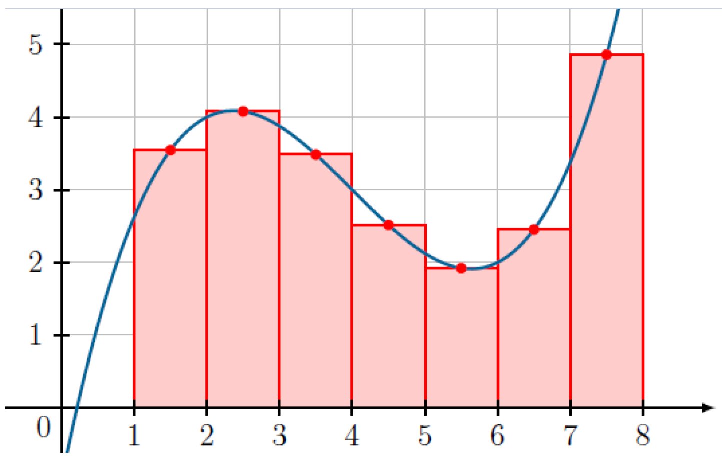
Algorithme

- on définit la largeur d'un rectangle $largeur=\frac{b-a}{n}$ en fonction du nombre n de sous-divisions
- rectangles gauches : on définit $x_{k+1}=largeur\cdot(k+1)$; on calcule tous les $f(x_{(k+1)})$; on calcule $S_{k+1}=f(x_{k+1})\cdot largeur$
- rectangles droites : on définit $x_k=largeur\cdot k$; on calcule tous les $f(x_k)$; on calcule $S_k=f(x_k)\cdot largeur$
- on ajoute les surfaces S_k

Précision : pas très précis

b. Méthode des milieux

On calcule la surface des rectangles centrés sur $x_k=largeur\cdot k$



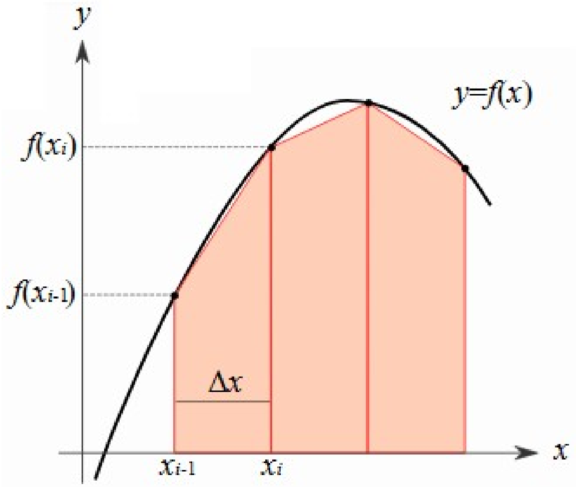
Algorithme

- on définit la largeur d'un rectangle $largeur=\frac{b-a}{n}$ en fonction du nombre n de sous-divisions
- on définit ; $x_k=largeur\cdot\frac{2k+1}{2}$ on calcule tous les $f(x_k)$
- on calcule $S_k=f(x_k)\cdot largeur$
- on ajoute les surfaces S_k

Précision : assez précis

c. Méthode des trapèzes

On calcule la surface des trapèzes compris entre $x_k = largeur \cdot k$ et $x_{k+1} = largeur \cdot (k+1)$



Algorithme

- on définit la largeur d'un trapèze $largeur = \frac{b-a}{n}$ en fonction du nombre n de sous-divisions
- on définit $x_k = largeur \cdot k$ et $x_{k+1} = largeur \cdot k + 1$
- on calcule tous les $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$
- on applique $S_k = \frac{(f(x_k) + f(x_{k+1}))}{2} \cdot largeur$
- on ajoute les surfaces S_k

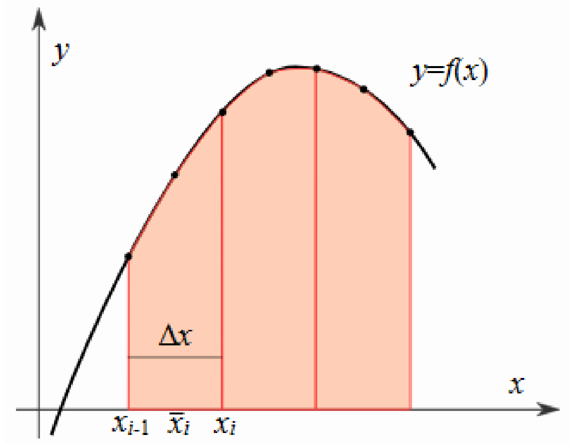
Précision : assez précis

d. Méthode de Simpson

On interpole la fonction à intégrer par un polynôme du second degré

On utilise la formule de Simpson : la surface entre x_k et x_{k+1} vaut :

$$S_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{6} \cdot \left(f(x_k) + 4 \cdot f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right)$$



Algorithme

- on définit la largeur d'un intervalle $largeur = \frac{b-a}{n}$ en fonction du nombre n de sous-divisions
- on définit ; on $x_k = largeur \cdot k$ et $x_{k+1} = largeur \cdot (k+1)$
- on calcule $S_k = \frac{1}{6} \cdot \left(f(x_k) + 4 \cdot f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right) \cdot largeur$
- on ajoute les surfaces S_k

Précision : précis

3. Régression linéaire statistique

a. Coefficient de corrélation

On définit le coefficient de corrélation de X et Y par :

$$r=\frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} \qquad -1\leq r\leq 1$$

b. Equation de la droite de régression

On définit une série statistique double en observant deux critères sur une même population de dimension n :

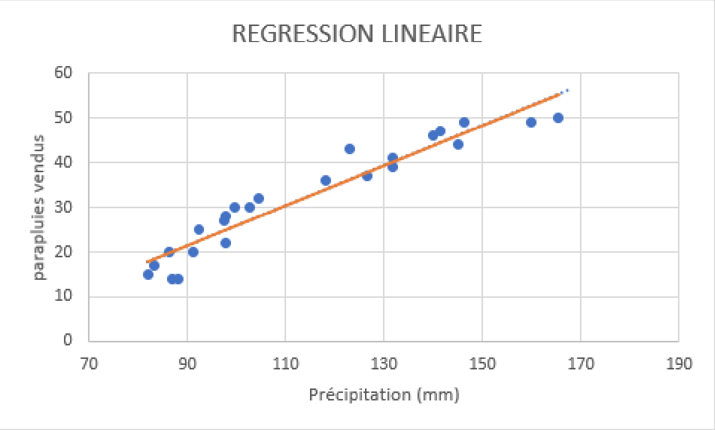
$$x=(x_1,x_2\ldots,x_n) \qquad y=(y_1,y_2\ldots,y_n)$$

Valeur x_i	x_1	x_2	…	x_n
Valeur y_i	y_1	y_2	…	y_n

L'ensemble des points de coordonnées (x_i,y_i), rapportés dans un repère, forme le nuage de points de la série (x,y).

La droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés a pour expression :

$$y=ax+b \quad \text{avec} \quad a=\frac{cov(X,Y)}{var(X)} \quad \text{et} \quad b=\overline{y}-a\overline{x}$$



Algorithme

- lire les données X et Y dans un fichier
- définir les fonctions $V(X)$, $M(X)$, $M(Y)$ et $COV(X,Y)$
- déterminer la valeur du coefficient de corrélation et estimer si le modèle linéaire est adapté
- tabuler Z ordonnées des points appartenant à la droite de regression
- afficher le résultat

Précision : précis lorsque $|r|>0{,}9$

4. Résolution d'équations différentielles

On souhaite résoudre graphiquement l'équation différentielle :

$$a\cdot f'(x)+b\cdot f(x)=c$$

a. Méthode d'Euler explicite

On utilise le terme $f'(t_k)\approx f'(t)$

Algorithme

- on définit le pas Δt et l'on discrétise la variable $t_k=k\cdot\Delta t$
- on détermine $f'(t_k)=\frac{c-b\cdot f(t_k)}{a}$
- on calcule $f(t_{k+1})=f(t_k)+\Delta t\cdot f'(t_k)$
- on représente graphiquement la solution $f(t)$

Précision : pas très précis

b. Méthode d'Euler implicite

On utilise le terme $f'(t_{k+1}) \approx f'(t)$

Algorithme

- on définit le pas Δt et l'on discrétise la variable $t_k = k \cdot \Delta t$
- on détermine $f'(t_{k+1}) = \dfrac{c - b \cdot f(t_{k+1})}{a}$
- on calcule $f(t_{k+1}) = f(t_k) + \Delta t \cdot f'(t_{k+1})$
- on représente graphiquement la solution $f(t)$

Précision : pas très précis

c. Méthode de Range Kutta d'ordre 2

On utilise le terme $\dfrac{(f'(t_k) + f'(t_{k+1}))}{2} \approx f'(t)$

Algorithme

- on définit le pas Δt et l'on discrétise la variable $t_k = k \cdot \Delta t$
- on détermine $f'(t_{k+1/2}) = \dfrac{1}{2}(f'(t_k) + f'(t_{k+1}))$
- on calcule $f(t_{k+1}) = f(t_k) + \Delta t \cdot f'(t_{k+1/2})$
- on représente graphiquement la solution $f(t)$

Précision : précis