Les applications linéaires – Fiche de cours

1. Définition

Soient E et F 2 sev de $\mathbb{R}$ et f une application de E vers F

f est une application linéaire ssi :

$$\forall u, v \in E, \forall a, b \in \mathbb{R} \quad f(au+bv) = a \cdot f(u) + b \cdot f(v)$$

2. Propriétés

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(ax) = af(x)$
- si f est bijective l'application linéaire est appelée isomorphisme de E dans F
- si $E = F$ l'application linéaire est appelée endomorphisme de E dans E
- si $E = F$ et f est bijective l'application linéaire est appelée automorphisme de E dans E
- Le noyau de l'application linéaire f est défini par :

$$Ker\, f \in E \quad \text{avec} \quad Ker\, f = \{x \in E, f(x) = 0\}$$

- L'image de l'application linéaire f est définie par :

$$\mathrm{Im}\, f \in E \quad \text{avec} \quad \mathrm{Im}\, f = \{f(x), x \in E\}$$

- f est injective ssi $Ker\, f = \{0_E\}$
- f est surjective ssi $\mathrm{Im}\, f = F$

3. Applications linéaires particulières

a. Projecteur

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E

Le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 est un endomorphisme

$$p_{E_1,E_2} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u = u_1 + u_2 & \mapsto & u_1 \end{array}$$

Le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 est un endomorphisme

$$p_{E_2,E_1} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u = u_1 + u_2 & \mapsto & u_2 \end{array}$$

b. Symétrie

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E

La symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est un endomorphisme

$$s_{E_1,E_2} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u = u_1 + u_2 & \mapsto & u_1 - u_2. \end{array}$$

La symétrie par rapport à E_2 parallèlement à E_1 est un endomorphisme

$$s_{E_2,E_1} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u = u_1 + u_2 & \mapsto & u_2 - u_1 \end{array}$$