# Ensembles et applications – Exercices – Devoirs

## Exercice 1

Ecrire les ensembles suivants en extension lorsqu'ils sont donnés sous forme implicite

1. $E_1 =$ ensemble des voyelles.
2. $E_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$.
3. $E_3 = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 4\}$.
4. $E_4 = \{(x, y)/x \in \{1, 2, ..., 6\}, y \in \{1, 2, .., 6\}$ et $x + y = 10\}$.
5. $E_5 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$

## Exercice 2

On note $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. On considère les deux sous ensembles de $E$ suivants :

$$A = \{0, 2, 3, 5, 8\} \qquad \text{et} \qquad B = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}.$$

Déterminer les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\backslash B$, $B\backslash A$.

## Exercice 3

Donner les ensembles suivant sous une forme plus simple.

1. $A = [0, 1] \cap [1/2, 4]$.
2. $B = ]-1, 1[ \cup [0, 3]$.
3. $C = [0, 1[ \cap [1, +\infty[$.
4. $D = [0, 5[ \cap \mathbb{N}$.

## Exercice 4

Écrire les ensembles suivants en compréhension (i.e. donner un critère d'appartenance à l'ensemble) :

$$X = \{3n, n \in \mathbb{Z}\} \qquad Y = \{n^2, n \in \mathbb{Z}\} \qquad Z = \{1, 2\}$$

Écrire les ensembles suivants en extension (i.e. donner la liste des éléments) :

$$X = \{n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, n = k^3\} \qquad Y = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 = 0\} \qquad Z = \{x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in \mathbb{R}, x = \cos\theta\}$$

## Exercice 5

1. Soient $E$ un ensemble et soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

Simplifiez les expressions suivantes :

$$A \cap E, \quad A \cup E, \quad A \setminus E, \quad E \setminus A,$$
$$A \cap \emptyset, \quad A \cup \emptyset, \quad A \setminus \emptyset,$$
$$A \cap A, \quad A \cup A, \quad A\backslash A.$$

2. On suppose dans cette question que $A \subset B$. Simplfier les expressions suivantes.

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A\backslash B.$$

3. On ne suppose plus que $A \subset B$. Simplfier les expressions suivantes.

$$A \cap (A \cup B), \qquad A \cup (A \cap B), \qquad A \cap (\overline{A} \cup B).$$

## Exercice 6

Montrer les équivalences:

$$1.\ E \subset F \iff E = E \cap F\ ; \qquad 2.\ E \subset F \iff F = E \cup F.$$

A quelle condition a-t-on $E \cup F = E \cap F$ ?

## Exercice 7

Si $A$, $B$ et $C$ sont des ensembles, montrer que :

1. $A \cup A = A \cap A = A$ ;
2. $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
5. $\big(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C\big) \Leftrightarrow B \subset C$.

## Exercice 8

Écrire les éléments de $\mathcal{P}(E)$ dans les cas où $E = \{a\}, \{a, b\}$ et $\{a, b, c\}$.

## Exercice 9

Pour $A$ et $B$ deux ensembles, montrer que :

1. $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
2. $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

## Exercice 10

Soit un ensemble $E$ et deux parties $A$ et $B$ de $E$. On appelle différence d'ensemble entre $A$ et $B$ et on note $A \setminus B$ la partie de $E$ qui contient tous les éléments de $A$ qui n'appartiennent pas à $B$ (on ne suppose pas forcément que $A$ contient $B$). Montrer que :

1. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$ ;
2. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.

On note $A \Delta B$ et on appelle différence symétrique de $A$ et $B$ l'ensemble $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(a) Faire une figure représentant $A$, $B$ et $A \Delta B$.

(b) Cette opération est-elle commutative ?

(c) Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(d) Que valent $A \Delta \emptyset$ ? $A \Delta A$ ? $A \Delta B$ si $A \subset B$ ?

(e) Simplifier $(A \Delta B) \cup \big(A \Delta (E \setminus B)\big)$.

## Exercice 11

Montrer l'implication :

$$\Big(A \cup B \subset A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A \cap C\Big) \Rightarrow B \subset C.$$

## Exercice 12

1. Comparer

(a) $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ ;

(b) $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ ;

(c) $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.

2. Comparer $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, en particulier quand $E$ et $F$ sont disjoints.

## Exercice 13

Soit $A$ une partie de $E$, on appelle fonction caractéristique de $A$ l'application $f$ de $E$ dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, telle que :

$$1_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

1. Soit $A$ et $B$ deux parties de $E$. Exprimer les fonctions caractéristiques de $E \setminus A$, $A \cap B$, $A \cup B$ en fonction de celles de $A$ et $B$.

2. Démontrer les relations suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

## Exercice 14

1) Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

2) A quelle condition a-t-on respectivement

$\mathcal{P}(E) = \emptyset$ ? $\quad \mathcal{P}(E) = \{a\}$ ? $\quad \mathcal{P}(E) = \{a, b\}$ ? $\quad \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$ ?

## Exercice 15

1) Comparer

(i) $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$; (ii) $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$; (iii) $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.

2) Comparer $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, en particulier quand $E$ et $F$ sont disjoints.

## Exercice 16

Soit des ensembles $A, E, F$ avec $A \subset E$ et une application $f : E \to F$. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et donner un contre-exemple à l'inclusion $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

## Exercice 17

Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications entre ensembles. Montrer que $g \circ f$ injectif n'implique pas $g$ injectif. De même, montrer que $g \circ f$ surjectif n'implique pas $f$ surjectif.

## Exercice 18

Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$.

(i) Montrer que $B = f\big(f^{-1}(B)\big)$ si et seulement si $B \subset \operatorname{Im} f$. Une des deux inclusions est toujours vraie. Laquelle?

(ii) De manière générale, montrer que $B \cap \operatorname{Im} f = f\big(f^{-1}(B)\big)$.

## Exercice 19

Soient $E$ et $F$ deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
5. $\forall A \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

## Exercice 20

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble $E$ indexée par un ensemble $I$ et $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble $F$ indexée par le même ensemble $I$. Soit $f$ une application de $E$ vers $F$.

Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

1. $f(\bigcup_{i \in I} A_i)$ et $\bigcup_{i \in I} f(A_i)$ (commencer par $f(A \cup B)$ si on n'a pas les idées claires).
2. $f(\bigcap_{i \in I} A_i)$ et $\bigcap_{i \in I} f(A_i)$.
3. $f(E \setminus A_i)$ et $F \setminus f(A_i)$.
4. $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i)$ et $\bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
5. $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i)$ et $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
6. $f^{-1}(F \setminus B_i)$ et $E \setminus f^{-1}(Bi)$.

## Exercice 21

1. Montrer qu'il existe une injection de $E$ dans $\mathcal{P}(E)$.
2. En considérant la partie $A = \{x \in E /\ x \notin f(x)\}$, montrer qu'il n'existe pas de bijection $f$ de $E$ sur $\mathcal{P}(E)$.

## Exercice 22

Soient des ensembles $E$ et $F$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

(i) Montrer que pour tout $A \subset E$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(ii) Traduire mathématiquement "$f$ est injective".

(iii) Montrer que $f$ est injective si et seulement si pour tout $A \subset E$, $A = f^{-1}(f(A))$.

## Exercice 23

Soient $E, F, G$ trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

**a.** Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.

**b.** Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective.

## Exercice 24

Soient $E, F, G$ trois ensembles, $g : E \to F$, $h : E \to F$, $f : F \to G$ trois applications. Démontrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g = f \circ h \\ f \text{ injective} \end{array}\right\} \Rightarrow g = h$$

## Exercice 25

Soit $f : E \to F$ une application. Que signifient les propositions suivantes ?

**a.** $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ y = f(x)$

**b.** $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$

**c.** $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ y = f(x)$

## Exercice 26

Soient $E, F$ et $G$ trois ensembles, $f : E \to F$, $g : E \to G$ deux applications. On considère la fonction $h$ suivante.

$$h : \left| \begin{array}{ccc} E & \mapsto & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \right.$$

**a.** Montrer que si $f$ ou $g$ est injective, alors $h$ est injective.

**b.** On suppose $f$ et $g$ surjectives. La fonction $h$ est-elle surjective ?

## Exercice 27

Soit $E$ un ensemble, $A \in \mathcal{P}(E)$. On note :

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cap X \end{array} \quad \text{et} \quad \psi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cup X \end{array}$$

**a.** Sous quelle condition $\varphi_A$ est-elle surjective ? Injective ?

**b.** Même question pour $\psi_A$.

## Exercice 28

L'image réciproque d'un ensemble $B$ par une application $f : E \to F$, notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des antécédents par $f$ des éléments de $B$.

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$$

**a.** Montrer que : $\forall (B_1, B_2) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_1)$

**b.** Montrer que : $\forall (B_1, B_2) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_1)$

## Exercice 29

Soient $E$ $A$ et $B$ deux sous-ensembles non vides d'un ensemble $E$. Considérons

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \mapsto & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) \\ & X & \mapsto & (A\cap X,\ B\cap X) \end{array}$$

**1.** Montrer que : $f$ est injective $\Leftrightarrow A\cup B = E$.

**2.** Montrer que : $f$ est surjective $\Leftrightarrow A\cap B = \emptyset$.

**3.** Supposons que $A\cup B = E$ et $A\cap B=\emptyset$. Déterminer l'application réciproque de $f$.

## Exercice 30

Dans une classe de 30 élèves, tous font au moins une des deux langues : allemand ou espagnol. 18 font allemand et 19 font espagnol. Combien font les deux langues?

## Exercice 31

Dans cet établissement, le quart des élèves ne fait pas d'allemand, le tiers ne fait pas d'anglais, 300 pratiquent les deux langues, et un douzième des élèves ne pratique aucune de ces deux langues. Combien d'élèves n'étudient que l'allemand ?