Ensembles et applications – Fiche de cours

1. Les ensembles

a. Définition

Un ensemble est une collection d'objets 2 à 2 indépendants appelés éléments

On peut définir un ensemble :

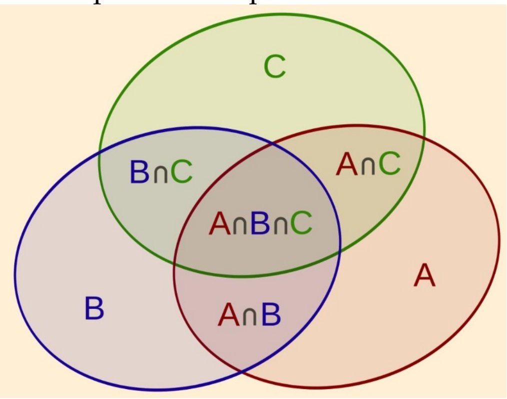
- en compréhension (hypothèses ou propriétés que doivent posséder les éléments de l'ensemble)
- en extension (résultat ou liste des éléments composant l'ensemble)

b. Propriétés

- relation d'appartenance d'un élément à un ensemble : $\in$
- objets distincts : un ensemble contient une seule fois le même élément
- ensemble vide : ne contient aucun élément appelé $\emptyset$
- paradoxe de Russel : un ensemble peut être élément d'un autre ensemble mais pas de lui-même

c. Représentation

Le diagramme de Venn permet la représentation des ensembles



2. Les sous-ensembles

a. Inclusion

Un ensemble A est sous-ensemble de B si tous ses éléments appartiennent à B

si $x \in A \Rightarrow x \in B$ est noté $A \subseteq B$

b. Egalité

Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$

c. Ensemble des parties

Soit A un ensemble ; l'ensemble des parties de A noté P(A) est l'ensemble des sous-ensembles de A

3. Opération des ensembles

a. Union

L'union des ensembles A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de A ou B

Propriétés de l'union :

Idempotence : $A \cup A = A$

Commutativité : $A \cup B = B \cup A$

Associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Elément neutre : $A \cup \emptyset = A$

b. Intersection

L'intersection des ensembles A et B notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de A et B

Propriétés de l'intersection :

Idempotence : $A \cap A = A$

Commutativité : $A \cap B = B \cap A$

Associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Elément neutre : *si l'on se place dans un ensemble Ω appelé univers et que A est un sous-ensemble de Ω alors $A \cap \Omega = A$*

c. Distributivité

On a les distributivités suivantes entre l'union et l'intersection :

de $\cup$ sur $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

de $\cap$ sur $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

d. Différence et complémentaire

La différence de l'ensemble A par l'ensemble B notée $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de A privé de ceux de B

La différence symétrique de l'ensemble A par l'ensemble B notée $A \Delta B$ est l'ensemble des élément de A ou de B exclusivement

Le complémentaire de l'ensemble A par rapport à Ω noté $\overline{A} = C_\Omega A$ est l'ensemble des éléments de Ω privé de ceux de A

e. Involution et lois de De Morgan

Involution : $\overline{\overline{A}} = A$

Loi de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

f. Produit cartésien

Le produit cartésien des ensembles A et B noté $A \times B$ est l'ensemble des couples formés par les éléments de A et B

Le produit cartésien des ensembles $A_1, A_2, \ldots A_k$ noté $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ est l'ensemble des k-uplets formés par les éléments de $A_1, A_2, \ldots A_k$

4. Les applications

a. Définition

Soient E et F deux ensembles ; une application $f : E \rightarrow F$ associe à tout élément de E un élément de F

E est appelé ensemble de départ ; F est appelé ensemble d'arrivé

L'ensemble image sont les valeurs $y \in F$ qui ont un antécédent $x \in E$ par $f(x)$

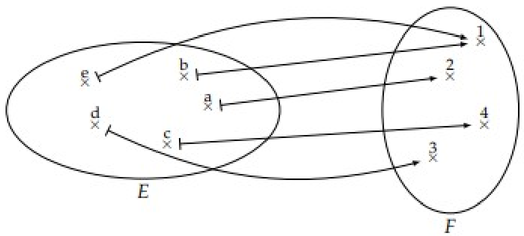
Si E et F sont deux ensembles, la collection des applications de E vers F forme un ensemble noté F^E

b. Représentation

- Tableau de valeur

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	aa	nj	zj	nk	za	az	aa	aa	zz	ju

- Diagramme de Venn



- Formule algébrique

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2+2x-5 \end{array}$$

- Courbe
- Algorithme

c. Composition

On considère les applications $f:E\to F$ et $g:F\to G$

L'application composée est définie par $g\circ f:E\to G$

Propriété : Soient les applications $f:E\to F$ $g:F\to G$ $h:g\to H$

alors : $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)=f\circ g\circ h$

d. Cas particuliers

- Identité

Soit A un ensemble ; l'application identité est définie par :

$$\mathrm{Id}_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

- Injection canonique

Soit A et B deux ensembles avec $A\subseteq B$; l'application injection canonique est définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

- Projection canonique

Soit $A_1\times A_2\times\ldots\times A_k$ le produit cartésien de k ensembles ; la projection canonique de i$^{\text{ème}}$ colonne est définie par :

$$\pi_i : \begin{array}{ccc} A_1\times\cdots\times A_k & \longrightarrow & A_i \\ (a_1,\ldots,a_k) & \longmapsto & a_i \end{array}$$

- Fonction caractéristique

Soient A et Ω deux ensembles avec $A\subseteq\Omega$; on définit la fonction caractéristique de l'ensemble A par :

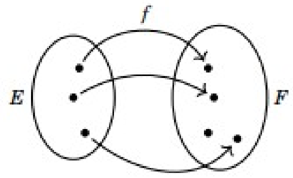
$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x\in A \\ 0 & \text{si } x\notin A \end{cases} \end{array}$$

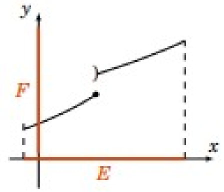
5. Propriétés des applications

a. Application injective

- Définition

Une application f est injective si à tout élément $y=f(x)\in F$, il existe au plus un antécédent $x\in E$



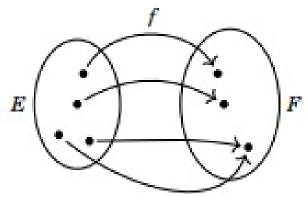


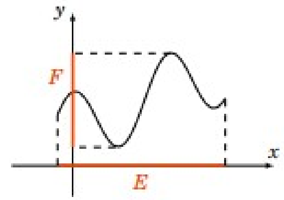
- Propriétés
  - une application monotone sur un intervalle est injective
  - $\forall(x,x')\in E^2$ $f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$

b. Application surjective

- Définition

Une application f est surjective si à tout élément $y=f(x)\in F$, il existe au moins un antécédent $x\in E$



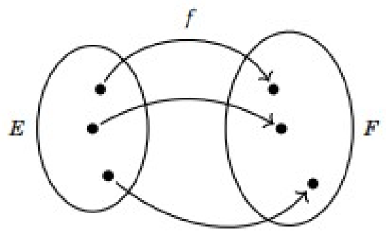


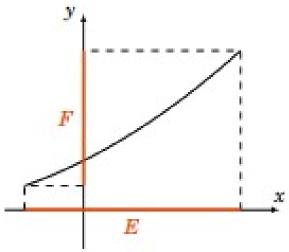
- <u>Propriétés</u>
  - une application monotone sur un intervalle est surjective
  - $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$

c. Application bijective

- <u>Définition</u>

  Une application f est bijective si à tout élément $y = f(x) \in F$, il existe 1 seul antécédent $x \in E$





- <u>Propriétés</u>
  - une application monotone sur un intervalle est bijective
  - une fonction injective et surjective sur un intervalle est bijective
  - $\forall y \in F \quad \exists ! x \in E \quad y = f(x)$

d. Bijection réciproque

- L'application $f(x)$ est bijective si et seulement si il existe une fonction $y = g(x)$ telle que $g \circ f(x) = x$ et $f \circ g(y) = y$
- Si $f(x)$ est bijective alors $g(x)$ est bijective
- $g(x)$ s'appelle la bijection réciproque et est notée $f^{-1}(x)$

e. Propriétés de la réciproque

- $f(x) \circ f^{-1}(x) = x$
- $f(x)$ et $f^{-1}(x)$ ont mêmes variations sur leur domaine de définition
- $\left(f^{-1}(x)\right)^{-1} = f$
- $\left(f(x) \circ f^{-1}(x)\right)' = 1 = \left(f^{-1}\right)' \circ f'\left(f^{-1}(x)\right)$