Les espaces vectoriels – Fiche de cours

1. Définition

On appelle K l'ensemble des nombres rationnels, réels ou complexes

Un espace vectoriel est un ensemble E non vide muni de :

- une loi de composition interne :

$$E\times E\rightarrow E$$
$$(u,v)\rightarrow u+v$$

- une loi de composition externe :

$$K\times E\rightarrow E$$
$$(\lambda,v)\rightarrow \lambda u$$

et vérifiant les propriétés suivantes :

Axiomes de la loi interne

1. commutativité : $\forall (u,v)\in E^2 \quad u+v=v+u$
2. associativité : $\forall (u,v,w)\in E^3 \quad u+(v+w)=(u+v)+w$
3. élément neutre : $\exists 0_E\in E$
4. symétrique ou opposé : $\forall u\in E \ \exists u'\in E \quad u+u'=0_E$

Axiomes de la loi externe

5. neutre : $\exists 1_E\in K \quad 1_E\cdot u=u$
6. factorisation scalaire :
   $\forall (\lambda,\mu)\in K^2 \quad \forall u\in E \quad \lambda(\mu\cdot u)=(\lambda\cdot\mu)\cdot u$

Axiomes des lois interne et externe

7. distributivité vectorielle :
   $\forall \lambda\in K \quad \forall (u,v)\in E\times E \quad \lambda(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$
8. distributivité scalaire :
   $\forall (\lambda,\mu)\in K^2 \quad \forall u\in E \quad (\lambda+\mu)u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u$

2. Sous-espace vectoriel

a. Définition

Soit E un K-espace vectoriel.

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel si :

- $0_E\in F$
- $\forall (u,v)\in F^2 \quad \forall (a,b)\in K^2 \quad a\cdot u+b\cdot v\in F$

b. Propriété

Soient E un K-espace vectoriel et F un sous-espace de E

F est un K-espace vectoriel pour les lois induites par E

c. Combinaison linéaire

Soit E un espace vectoriel composé des vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ ... $\vec{u_n}$ et λ_1, λ_2 ... λ_n des éléments de l'ensemble K

Une combinaison linéaire de E est définie par :

$$\vec{v}=\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+...+\lambda_n\vec{u_n}$$

d. Sous espace vectoriel Vect

Soit F une famille de vecteurs; le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs d'une famille de vecteurs est appelé sous-espace vectoriel engendré ; il est noté :

$$Vect\ A=\{u_1;u_2...;u_n\}$$

3. Familles de vecteurs, bases et dimension

a. Famille libre

Soit F une famille de vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ ... $\vec{u}_n$ et λ_1 , λ_2 ... λ_n des éléments de l'ensemble K

Une famille de vecteurs est libre lorsque :

$$\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+\ldots+\lambda_n\vec{u}_n=\vec{0} \Rightarrow \lambda_1=0,\lambda_2=0,\ldots\lambda_n=0$$

b. Dimension

La dimension d'un espace vectoriel est définie par :

- le nombre de vecteurs permettant d'exprimer les coordonnées d'un élément dans cet espace
- le nombre de coordonnées non liées pour les vecteurs et matrices
- le nombre de coefficients non liés pour un polynôme
- 1 pour les droites vectorielles
- 2 pour les plans vectoriels

Soit F un sev de E alors $dim(F)\leq dim(E)$

Si F et G sont 2 sev de E avec $F\subset G$ et $dim F=dim G$ alors $F=G$

c. Famille génératrice

Soit F une famille de vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ ... $\vec{u}_n$ et λ_1 , λ_2 ... λ_n des éléments de l'ensemble K

$rg(F)$ est le nombre de vecteurs libres sur F

Une famille F de vecteurs peut générer un espace vectoriel lorsque :

$$F\subset E \text{ et } rg(F)\geq dim(F)$$

d. Base

Une base est une famille de vecteurs libre et génératrice

e. Base canonique

- espace $\mathbb{R}^2$ $B=(e_1,e_2)$ $e_1=(1,0)$ $e_2=(0,1)$
- espace $\mathbb{R}^3$ $B=(e_1,e_2,e_3)$ $e_1=(1,0,0)$ $e_2=(0,1,0)$ $e_3=(0,0,1)$
- espace $\mathbb{R}_1[X]$ $B=(1,X)$
- espace $\mathbb{R}_2[X]$ $B=(1,X,X^2)$

4. Somme directe de sev, sev supplémentaires

a. Somme directe de sev

Soient F et G deux sev

La somme directe de F et G est notée $F\oplus G$

La somme de F et G est directe ssi tout élément de F+G s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G

Une condition nécessaire et suffisante pour démontrer que F et G sont en somme directe sur E est : $F\cap G=\{0_E\}$

b. Sev supplémentaires

Soit E un ev ; soit F et G deux sev en somme directe sur E

F et G sont des sev supplémentaires ssi :

- $F\subset E$ $G\subset E$ $F\cap G=\{0_E\}$ et $E=F\oplus G$

c. Propriété

Soit E un ev et F et G deux sev en somme directe sur E alors :

$$E=F\oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F\cap G=\{0_E\} \\ dim F+dim G=dim E \end{cases}$$