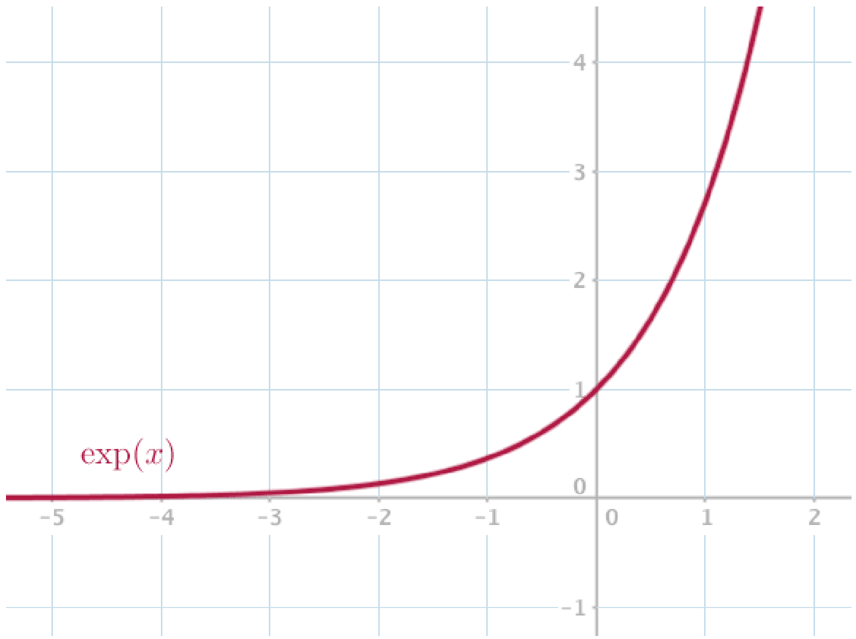
Fonctions exponentielle et logarithme – Fiche cours

1. Fonction exponentielle

a. Définition

La fonction exponentielle est définie, dérivable et unique sur $\mathbb{R}$ tel que : $f=f'$ et $f(0)=1$; on utilise la notation $\exp(x)=e^x$



b. Propriétés de construction

$e^x>0$ $e^0=1$ $e^1=e\approx 2{,}718$

e^x est croissante sur $\mathbb{R}$

c. Résolution d'équations et d'inéquations

$e^x=e^a \Leftrightarrow x=a$ $e^x<e^a \Leftrightarrow x<a$ $e^x>e^a \Leftrightarrow x>a$

d. Dérivée et composition

- $\forall x\in\mathbb{R}$ $(e^x)'=e^x$
- $\forall x\in\mathbb{R}$ $(e^u)'=u'\cdot e^u$

e. Propriétés algébriques

$\forall x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}$

$e^{x+y}=e^x\times e^y$ $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ $(e^x)^n=e^{n\cdot x}$

f. Croissances comparées

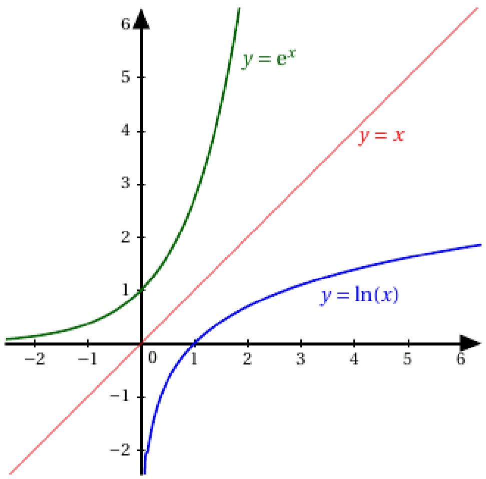
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\cdot e^x=0$ _ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

2. Fonction logarithme

a. Définition

La réciproque de e^x s'appelle fonction logarithme népérien et est définie par :

$$\begin{cases} x \to \ln x \\ ]0\,;+\infty[\to]-\infty\,;+\infty[\end{cases}$$



b. Propriétés

$x \in]0;1[$ $\ln x<0$ $x=1$ $\ln x=0$ $x\in]1;+\infty[$ $\ln x>0$

c. Règles de calcul

$\forall a>0\ \forall\ b>0\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\ln a+\ln b=\ln(a\cdot b) \qquad \ln a-\ln b=\ln\left(\frac{a}{b}\right) \qquad n\cdot\ln a=\ln a^n$$

d. Liens avec la fonction exponentielle

$\forall a\in\mathbb{R}$; $\ln e^a=a$

$\forall b\in]0;+\infty[$; $e^{\ln b}=b$

e. Equations et inéquations logarithmiques

$\forall a>0\ \forall\ b>0$

$$\ln a>\ln b \Leftrightarrow a>b \qquad \ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b \qquad \ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$$

f. Limites

$$\lim_{x\to 0+} \ln x=-\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0+} x^n \ln x=0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}=+\infty \text{ pour } n\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}=1$$

g. Composition de fonction

- Dérivée $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$
- Fonction associée

  Soit u une fonction à valeur positives définie sur I

  u et $\ln u$ ont les mêmes variations sur I