Intégration sur un segment – Exercices – Devoirs

Exercice 1

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$
2. $f_2(x) = \exp(3x)$
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{x+a}, \quad a \in \mathbb{R}$
4. $f_4(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$
5. $f_5(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
6. $f_6(x) = \tan(x)$
7. $f_7(x) = \dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$
8. $f_8(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

Exercice 2

Déterminer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3t)dt$
2. $\displaystyle\int_0^2 te^{-\frac{t^2}{2}} dt$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)dt$
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^t}{e^t+1}dt$
5. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)\cos^2(x)dx$
6. $\displaystyle\int_1^2 (\ln(x))\, dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x+1).e^{-x}\, dx$

Exercice 3

À l'aide du formulaire de primitives, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^x t^2\exp(t^3)\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^1 (4t+3)^2\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^1 \frac{1}{9t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4

En intégrant par partie, déterminer :

1. $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\, dx$
2. $\displaystyle\int_1^3 t^{15}\cdot \ln t\, dt$

Exercice 5

À l'aide de la formule de changement de variable, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 6

Détermine une primitive des fonctions suivantes

$$x \mapsto \frac{1}{x-7}, \quad x \mapsto \frac{1}{(x-11)^n} \text{ avec } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2+1}, \quad x \mapsto \frac{1}{4x^2+1}, \quad x \mapsto \frac{1}{5x^2+3}.$$

Exercice 7 corrigé disponible

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{4t^2+1}dt \qquad \int_0^{1/9} \frac{1}{1-9t^2}dt \qquad \int_0^{1} \frac{5}{x^2+x-6}dt$$

$$\int_{-2}^{2} (3-4t)^5 dt$$

Exercice 8 corrigé disponible

Calculer les primitives suivantes :

$$\int^x \frac{dt}{t^2+5} \quad ; \quad \int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}} \quad ; \quad \int^x e^t \sin(e^t)\ dt \quad ; \quad \int^x \tan^3 t\ dt \quad ;$$

$$\int^x \frac{2t+3}{(t^2+3t+7)^5}\ dt \quad ; \quad \int^x \frac{\ln t}{t}\ dt \quad ;$$

Exercice 9

Déterminez une primitive, sur leur ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+3x+4} \qquad x \mapsto \frac{4x+3}{x^2+x+1} \qquad x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Exercice 10

Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x-1}$ *et calculer* I.

Exercice 11

En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer :

$$\int_0^{2\pi} x\sin(x)\, dx, \qquad \int_0^1 e^x x^2\, dx$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

Exercice 12

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n\, dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Chercher une relation entre I_{n+2} et I_n pour $n \in \mathbb{N}$, en effectuant une(des) intégration(s) par partie.
3. Donner une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$
5. En déduire que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$
6. Conclure en montrant la formule de Wallis :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}\right)^2 = \pi$$

Exercice 13

À l'aide de la formule de changement de variable, calculer l'intégrale :

$$\int_a^b \frac{e^{2x}}{e^{2x}+e^x+1} dx$$

Exercice 14

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{4x-3}{2x^2-4x+3}dx \qquad \int_{-1}^0 \frac{x^3-3x^2-2}{(x-3)\cdot(x-1)}dx$$

Exercice 15

Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Calculer I_0 et I_1
2. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}
3. Montrer que $I_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$
4. Sachant que $(1-t^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-t^2)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k t^{2k}$,

   montrer que : $$I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$$

Exercice 16

Soit f définit par $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+(tx)^3}dt$, pour $x \geq 0$.

1. Calculer $f(0)$
2. Faire un changement de variable $u = tx$
3. Montrer que f est bien continue en $x = 0$

Exercice 17

Soit $0 < \varepsilon < 1$ un réel.

1. Calculer $\int_\epsilon^1 \ln(x)dx$
2. En déduire la limite de cette quantité quand $\epsilon \to 0^+$