Logique et raisonnement – Fiche de cours

1. La logique

a. Assertion ou proposition logique

Une assertion ou proposition logique est une affirmation formée par des mots clés ou des symboles à laquelle on veut attribuer la valeur « vrai » ou la valeur « faux »

b. Négation

La négation consiste à affirmer le contraire d'une assertion (nier son existence)

A	$\overline{A}$
F	V
V	F

c. Fonction logique « et »

Soients A et B deux propositions logiques
La proposition « A et B » est définie par la table de vérité suivante
La fonction ET est appelée conjonction

A	B	$A \cap B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

d. Fonction logique « ou »

Soients A et B deux propositions logiques
La proposition « A ou B » est définie par la table de vérité suivante
La fonction OU est appelée disjonction

A	B	$A \cup B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

e. Fonction logique « ou exclusif »

Soients A et B deux propositions logiques
La proposition « A ou exclusif B » est définie par la table de vérité suivante
La fonction OU exclusif est appelée dilemme

A	B	$A \oplus B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

f. Lois de De Morgan

Soient A et B deux propositions logiques
Les lois de De Morgan s'énoncent par $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

g. L'implication

Soient A et B deux propositions logiques avec $A \subset B$
La proposition « $A \Rightarrow B$ » est définie par la table de vérité suivante
$non(A \Rightarrow B) = A$ et $non(B)$

A	B	$A \Rightarrow B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

h. La réciproque

Soient A et B deux propositions logiques avec $A \subset B$
La proposition « $A \Leftarrow B$ » est définie par la table de vérité suivante
$non(B \Rightarrow A) = B$ et $non(A)$

A	B	$A \Leftarrow B$
F	F	V
F	V	F
V	F	V
V	V	V

i. L'équivalence

Soient A et B deux propositions logiques avec $A \subset B$
La proposition « $A \Leftrightarrow B$ » est définie par la table de vérité suivante

A	B	$A \Leftrightarrow B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

j. Quantificateurs et prédicats

- universel : il est noté $\forall$
- existentiel : il est noté $\exists$
- existentiel unique: il est noté $\exists!$
- prédicat : assertion qui dépend d'un ou plusieurs paramètres comme P(x)

2. Les raisonnements

a. Raisonnements directs

- implication

Pour établir si « $A \Rightarrow B$ » est vraie on suppose que A est vraie et on démontre que B est vraie

- réciproque

Pour établir si « $B \Rightarrow A$ » est vraie on suppose que B est vraie et on démontre que A est vraie

- équivalence

Pour établir si « $A \Leftrightarrow B$ » est vraie on doit démontrer $A \Rightarrow B$ est vraie et $B \Rightarrow A$ est vraie.

b. Contre-exemple

Pour établir qu'une propriété A est fausse, il suffit de prouver l'existence d'au moins un contre exemple

c. Négation / Absurde

Pour démontrer qu'une propriété A est vraie, on peut rechercher un contre exemple de sa négation

d. Disjonction des cas

On démontre une propriété en séparant et en étudiant tous les cas.
Exemple : la parité, étude des cas d'une valeur absolue

e. Contraposée

$A \Rightarrow B$ est équivalent à $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

g. Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition P_n est vraie $\forall\ n \geq n_0$
Initialisation : on démontre que Pn_0 est vraie
Hérédité : on démontre que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie

h. Analyse-Synthèse

- analyse : on détermine les conditions nécessaires
- synthèse : on détermine les conditions suffisantes (on vérifie la validité des solutions obtenues avec la partie analyse)