Les polynômes – Fiche de cours

1. Définition

Soit $\mathbb{K}$ l'un des ensembles $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Un polynôme est une expression de la forme :
$P(X) = a_n X^n + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{K}$

- pour $a_n = 1$: polynôme unitaire
- $deg(P) = n$

2. Division euclidienne

a. Définition

Soit A, B , Q et R des polynômes de $\mathbb{K}$

La relation $A = B \cdot Q + R$ avec $deg(R) < deg(B)$ est appelée division euclidienne polynomiale

b. pgcd

Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}$

Le pgcd(A;B) est l'unique polynôme unitaire de plus grand degré qui divise A et B

- $pgcd(\lambda A, B) = pgcd(A, B)$
- $pgcd(A, B) = pgcd(B, R)$ (division euclidienne)
- deux polynômes A et B sont premiers entre-eux si $pgcd(A, B) = 1$

3. Théorème de Bézout

Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}$

Soit $D = pgcd(A;B)$; il existe 2 polynômes U et V de $\mathbb{K}$ tels que :

$$A \cdot U + B \cdot V = D$$

Si A et B sont premiers entre-eux alors $A \cdot U + B \cdot V = 1$

4. PPCM

Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}$

Le ppcm(A ; B) est l'unique polynôme M de plus bas degré tel que :

$$A | M \quad \text{et} \quad B | M$$

5. Factorisation

a. Racine d'un polynôme

Soit P un polynôme non nul ; si α est une racine de P alors :

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow X - \alpha | P$$

Multiplicité d'une racine : Il y a équivalence pour les propositions suivantes :

- α est une racine de multiplicité k de P
- $P = (x - \alpha)^k \cdot Q$
- $P(\alpha) = P'(\alpha) = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$

b. <u>Théorème de d'Alembert-Gauss</u>

Tout polynôme de degré ≥ 1 admet au moins 1 racine sur $\mathbb{C}$

Tout polynôme de degré ≥ 1 admet au plus n racines sur $\mathbb{K}$

c. <u>Polynômes irréductibles</u>

Un polynôme est irréductible lorsque l'on ne peut pas le factoriser sur $\mathbb{K}$

d. <u>Factorisation</u>

Tout polynôme non constant peut être factorisé comme un produit de polynômes irréductibles :

$$A = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_r^{k_r}$$

- <u>Polynômes irréductibles de</u> $\mathbb{C}$

  Les polynômes irréductibles ont pour degré 1

- <u>Polynômes irréductibles de</u> $\mathbb{R}$

  Les polynômes irréductibles ont pour degré 1 ou 2 (discriminant ≤ 0)