Réduction d'endomorphisme – Fiche de cours

1. Définition

Soit E un espace vectoriel et f l'un de ces endomorphismes ayant pour représentation A

Réduire l'endomorphisme f c'est trouver une base de E la plus simple possible pour écrire A

- diagonalisation

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E telle que :

$$\mathrm{D}(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- triangularisation

On dit que f est triangularisable s'il existe une base de E telle que :

$$\mathrm{T}(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } \mathrm{T}(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Valeurs propres – Vecteurs propres – Matrice de passage

a. Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f est défini par : $f-\lambda I_d=0$ ou bien pour une A matrice $|A-\lambda\, Id|=0$

b. Valeurs propres

La résolution du polynôme caractéristique permet de déterminer les valeurs propres λ_i de l'endomorphisme

c. Vecteurs propres

Les vecteurs propres u_i de l'endomorphisme f associés aux valeurs propres λ_i vérifient la condition : $f(u_i)=\lambda_i \cdot u_i$

d. Matrice de passage

La matrice de passage P à une base la plus simple de f est constituée par les vecteurs propres u_i rangés en colonne et associés aux valeurs λ_i

3. Diagonalisation

a. Conditions de diagonalisation

Une matrice carrée A est diagonalisable ssi $dim\, A=\sum dim\, u_i$

exemple : $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

b. Relation du changement de base

Si A est diagonalisable alors il existe P (matrice carrée et inversible) tel que : $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$

c. Puissance de matrice

Si A est diagonalisable alors : $A^n=P\cdot D^n\cdot P^{-1}$