Corrélation et régression linéaire – Fiche de cours

1. Présentation

Pour évaluer l'association entre 2 variables quantitatives, on peut établir 3 niveaux :

- dépendance
- dépendance monotone (corrélation et régression linéaire)
- concordance

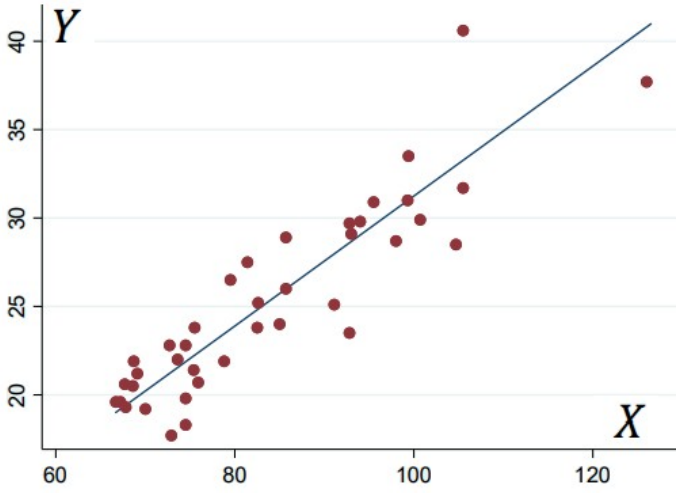
2. Coefficient de corrélation (Pearson)

a. Série statistique à 2 variables

On définit une série statistique double en observant deux critères sur une même population de dimension n :

$$x=(x_1,x_2\ldots,x_n) \qquad y=(y_1,y_2\ldots,y_n)$$

Valeur x_i	x_1	x_2	…	x_n
Valeur y_i	y_1	y_2	…	y_n



b. Sur une population

- covariance

La covariance sur une série de dimension n liée à la population est définie par :

$$COV(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)\cdot(y_i-\mu_y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i-\mu_x\cdot\mu_y$$

- variance et écart type

La variance et l'écart-type sur une série de dimension n liée à la population sur X est définie par :

$$V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\mu_x^2 \qquad \sigma_X=\sqrt{V(X)}$$

De la même manière on définit $V(Y)$ et $\sigma_Y=\sqrt{V(Y)}$

- coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation linéaire

$$\rho=\frac{COV(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \qquad \rho\in[-1;1]$$

Si ρ proche de -1 ou de 1 alors il y a association linéaire

c. Sur un échantillon

- covariance

La covariance sur une série de dimension n liée à un échantillon est définie par :

$$cov(X,Y)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)\cdot(y_i-m_y)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i-m_x\cdot m_y$$

- variance et écart type

La variance et l'écart-type sur une série de dimension n liée à un échantillon sur X est définie par :

$$V(X)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-m_x^2 \qquad s_X=\sqrt{V(X)}$$

De la même manière on définit $V(Y)$ et $s_Y=\sqrt{V(Y)}$

- coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation linéaire

$$r=\frac{cov(X,Y)}{s_X\cdot s_Y} \qquad r\in[-1;1]$$

Si r proche de -1 ou de 1 alors il y a association linéaire

d. Test de significativité du coefficient de corrélation linéaire

On souhaite estimer au risque α si le coefficient de corrélation obtenu lors d'un échantillonnage est un bon estimateur dans la population générale

Hypothèse nulle : $H_0:\rho=0$ Hypothèse alternative : $H_1:\rho\neq 0$

Statistique de test : $t_0=\frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$ Seuil : $s=t_{(n-2);\frac{\alpha}{2}}$

3. Droite de régression linéaire

a. Définition

La droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés de l'échantillon a pour expression : $y=a\cdot x+b$

L'équation de la droite pour la population a pour expression :

$$y=p\cdot x+q$$

a est un estimateur de p et b un estimateur de q

avec $a=\frac{cov(X,Y)}{s_X^2}$ et $b=m_Y-a\,m_X$

x est la variable explicative (connue sans erreur)

y est la variable réponse (connue avec un écart ou un résidu)

b. Test de significativité de la pente de la droite de régression

On souhaite estimer au risque α s'il y a association entre les variables X et Y dans la population

Hypothèse nulle : $H_0:p=0$ Hypothèse alternative : $H_1:p\neq 0$

Statistique de test : $t_0=\frac{a}{s_a}$ Seuil : $s=t_{(n-2);\frac{\alpha}{2}}$

avec $s_a^2=\frac{\frac{s_Y^2}{s_X^2}-a^2}{n-2}$