Lois de distribution – Fiche de cours

1. Variables aléatoires

a. Définition

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

On appelle variable aléatoire réelle X une fonction définie de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

b. Variables aléatoires discrètes

Le nombre de valeurs prises par la VA est fini ou infini dénombrable

c. Variables aléatoires continues

Le nombre de valeurs prises par la VAR est infini

2. Loi de probabilité

a. Définition

On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la fonction qui à chaque valeur x_i associe la probabilité de l'événement $P(X = x_i)$

b. Lois de probabilités discrètes

On peut résumer les résultats dans un tableau ou exprimer la probabilité par une relation mathématique

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Exemple : loi de Bernouilli, loi binomiale, loi de Poisson

c. Lois de probabilités continues (densité de probabilité)

La probabilité est définie par une fonction mathématique

- Définition

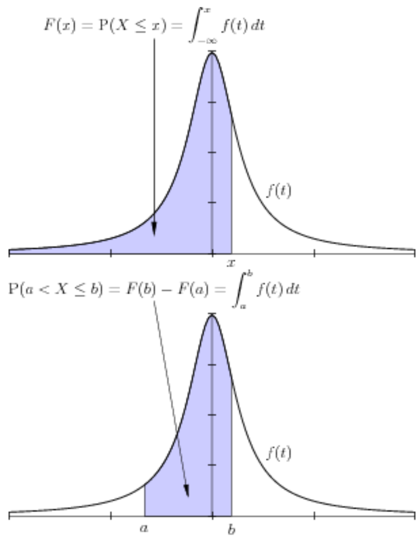
On appelle densité de probabilité une fonction f telle que :

- f est définie sur I ∊ $\mathbb{R}$ et $f > 0$
- f est continue sur I sauf en quelques points
- $\int_I f(x)\,dx = 1$

- Probabilité d'un événement – Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire de densité f

- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$
- $P(-\infty \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(t)\,dx = \lim\limits_{x \to \infty} \int_x^b f(t)\,dt$



d. Fonction de répartition

- Lois discrètes

$$F=\sum_{i=0}^{k} P(X\leq x_i)$$

- Lois continues

$$F=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

3. Paramètres de la loi de distribution

3.1. Espérance mathématique loi discrète

On appelle espérance mathématique :

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

3.2. Variance mathématique loi discrète

On appelle variance :

$$V(X)=\sum(x_i-E(X))^2\cdot p_i=E(X^2)-E(X)^2$$

3.3. Espérance mathématique loi continue

Soit X une variable aléatoire de densité f

L'espérance mathématique de X est définie par :

$$E(X)=\int_I x f(x)\,dx$$

3.4. Variance mathématique loi continue

La variance de X est définie par :

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

3.5. Ecart type

On appelle écart type : $\sigma=\sqrt{V(X)}$

3.6. Covariance

On appelle covariance de 2 variables X et Y :

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

3.6. Propriétés

X et Y deux variables aléatoires ; a et b deux réels

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

$$Var(aX+b)=a^2Var(X)$$

$$Var(aX+bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2ab\,cov(X,Y)$$

$$Var(aX-bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)-2ab\,cov(X,Y)$$

4. Loi de Bernouilli

La loi de Bernouilli est une expérience aléatoire avec 2 issues :

- Succès : probabilité p
- Echec : probabilité $1-p$

p est appelé paramètre de la loi de Bernouilli

5. Loi binomiale

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès

Pour n répétitions identiques et indépendantes de la loi de Bernouilli de paramètre p, X suit une loi binomiale B(n ; p)

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

- Espérance mathématique

$$E(X)=n\times p$$

- Variance et l'écart type

$$V(X)=n\times p\times(1-p) \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

6. Loi de Poisson

- **Probabilité de la loi de Poisson**

Pour la variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $P(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$

- **Espérance de la loi de Poisson**

$$E(X)=\lambda$$

- **Variance de la loi de Poisson**

$$V(X)=\lambda \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

- **Approximation de la binomiale par la loi de Poisson**

Lorsque $n\geq 50$ $p\leq 0{,}01$ et $np\leq 10$ on dit qu'il y a convergence de loi entre la loi binomiale et la loi de Poisson

7. Lois normales

- **Loi normale centrée et réduite**

La loi normale centrée et réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi continue de densité la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- **Propriétés**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée et réduite alors :

- $P(a\leq X\leq b)=\int_a^b f(t)\,dt$
- $P(-\infty\leq X\leq +\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=1$
- E(X) =0 V(X) =1 $\sigma_X=1$

- **Autres propriétés**

Pour X une loi normale centrée et réduite :

$P(-t\leq X\leq t)=2P(X\leq t)-1$ $\qquad P(X\leq -t)=P(X\geq t)$

$P(-1\leq X\leq 1)=0{,}68$

$P(-1{,}96\leq X\leq ,196)=0{,}95$ $\qquad P(-2\leq X\leq 2)=0{,}955$

$P(-2{,}58\leq X\leq 2{,}58)=0{,}99$ $\qquad P(-3\leq X\leq 3)=0{,}997$

- **Loi normale générale**

La loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ est la loi continue de densité la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- espérance mathématique : $E(X)=\mu$
- variance mathématique : $Var(X)=\sigma^2$

- **Variable centrée et réduite**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

On appelle Z la variable aléatoire centrée et réduite définie par :

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

- **Convergence de lois**

- La loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ converge vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$

- La loi binomiale B(n ; p) converge vers la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ pour :

$n\geq 30$ $\quad np\geq 5$ $\quad n(1-p)\geq 5$ avec $\mu=np$ et $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$

- La loi de Poisson $P(\lambda)$ converge vers la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ pour : $\lambda\geq 30$

$\mu=\lambda$ et $\sigma=\sqrt{\lambda}$