

# Théorie des tests statistiques – Fiche de cours

## 1. Les tests statistiques

### a. Objectif d'un test statistique

Déterminer si la différence observée est liée à des fluctuations d'échantillonnage ou à une vraie différence

### b. Etapas du test

- Formuler l'hypothèse nulle  $H_0$  « = » vis à vis de la population (ou des 2 populations)
- Formuler l'hypothèse alternative  $H_1$  unilatérale « > ou < » ou bilatérale «  $\neq$  »
- Choisir le risque  $\alpha$
- Choisir le type de test (test en Z / Student /  $\chi^2$ ) et définir le seuil  $s$
- on calcule la statistique du test  $x_0$  et le degré de signification  $p$  pour le test en Z / Student (probabilité que  $H_0$  soit fausse)
- Conclusion du test :
  - si  $p > \alpha$  et  $x_0 < s$ , on ne peut pas rejeter  $H_0$
  - si  $p < \alpha$  ou  $x_0 > s$ , on rejette  $H_0$

### c. Les erreurs de test

- erreur de première espèce  $\alpha$  : rejeter à tort  $H_0$  alors qu'elle est vraie
- erreur de deuxième espèce  $\beta$  : ne pas rejeter  $H_0$  alors qu'elle est fausse

## 2. Tests statistiques paramétriques

### a. Types de tests

- comparer un échantillon à une référence
- comparer 2 échantillons indépendants
- comparer 2 échantillons appariés (mêmes individus à des instants différents)

### b. Comparaison d'une moyenne à une valeur théorique

#### - Hypothèses

$$H_0: m = \mu ; H_1: m \neq \mu$$

#### - Test de l'écart réduit

Conditions  $n \geq 30$  ;  $s^2$  est connue

Le seuil au risque  $\alpha$  est donné par la table de la loi normale

#### - Test de Student

Condition pour toute valeur de N ; distribution normale ;

distribution à N-1 ddl :  $s^2$  est connue

Le seuil au risque  $\alpha$  est donné par la table de la loi de Student

#### - Statistique du test

$$z_0 = t_0 = \frac{m - \mu_H}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

### b. Comparaison de 2 moyennes

#### - Hypothèses

$$H_0: m_1 = m_2 ; H_1: m_1 \neq m_2$$

#### - Test de l'écart réduit

Condition  $N_1 \geq 30$  ,  $N_2 \geq 30$  ,  $s_1^2$  et  $s_2^2$  sont connues

Le seuil au risque  $\alpha$  est donné par la table de la loi normale

$$z_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

#### - Test de Student

Condition pour toute valeur de  $N_1$  et  $N_2$ ; égalité des variances ; distribution normale ; distribution à  $N_1 + N_2 - 2$  ddl

Le seuil au risque  $\alpha$  est donné par la table de la loi de Student

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{s^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad \text{avec} \quad s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

## 3. Tests statistiques non-paramétriques

### a. Types de test

- test de  $\chi^2$  de conformité (comparer 1 variable à 1 référence) ;

test de Mac Nemar

- test de  $\chi^2$  d'indépendance (comparer 2 variables sur échantillons indépendants) ; test de Pearson

- test de  $\chi^2$  d'homogénéité (comparer 2 variables sur échantillons appariés) ; test de Mac Nemar

### b. Tableau de contingence des effectifs observés

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	... $B_j$ ...	$B_k$	Total
$A_1$	$O_{11}$	$O_{12}$	$O_{13}$	...	$O_{1k}$	$a_1$
$A_2$	$O_{21}$	$O_{22}$	$O_{23}$	...	$O_{2k}$	$a_2$
$A_3$	$O_{31}$	$O_{32}$	$O_{33}$	...	$O_{3k}$	$a_3$
$A_i$	...	...	...	$O_{ij}$	...	$a_i$
$A_l$	$O_{l1}$	$O_{l2}$	$O_{l3}$	...	$O_{lk}$	$a_l$
Total	$b_1$	$b_2$	$b_3$	... $b_j$ ...	$b_k$	$N$

$$ddl = (Colonne - 1) \cdot (Ligne - 1)$$

### c. Tableau de contingence des effectifs attendus

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	... $B_j$ ...	$B_k$	Total
$A_1$	$E_{11}$	$E_{12}$	$E_{13}$	...	$E_{1k}$	$a_1$
$A_2$	$E_{21}$	$E_{22}$	$E_{23}$	...	$E_{2k}$	$a_2$
$A_3$	$E_{31}$	$E_{32}$	$E_{33}$	...	$E_{3k}$	$a_3$
$A_i$	...	...	...	$E_{ij}$	...	$a_i$
$A_l$	$E_{l1}$	$E_{l2}$	$E_{l3}$	...	$E_{lk}$	$a_l$
Total	$b_1$	$b_2$	$b_3$	... $b_j$ ...	$b_k$	$N$

$$E_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{N}$$

### d. Statistique du test

Condition : tous les  $E_{ij} \geq 5$

$$\chi_0 = \frac{(O_{11} - E_{11})^2}{E_{11}} + \frac{(O_{12} - E_{12})^2}{E_{12}} + \dots + \frac{(O_{lk} - E_{lk})^2}{E_{lk}}$$

### e. Remarque

Lorsque  $E_{ij} < 5$  on peut réaliser un test exact de Fisher