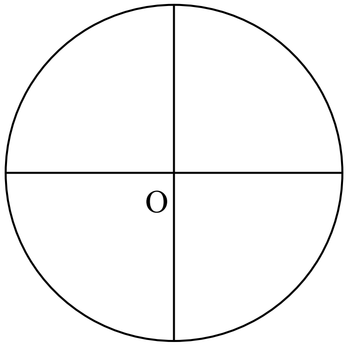
Fonctions trigonométriques – Exercices

Exercice 1

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points représentatifs des réels suivants :

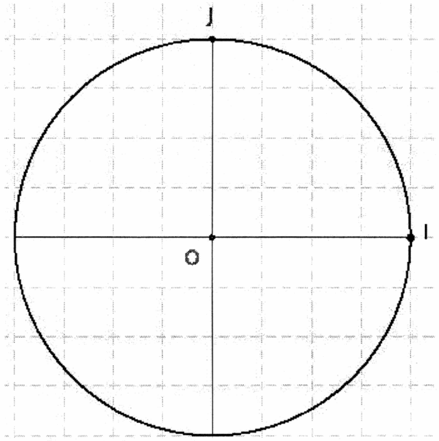
$$\frac{2\pi}{3} \; ; \; -\frac{3\pi}{4} \; ; \; \frac{17\pi}{6} \; ; \; \frac{5\pi}{2}$$



2.

Déterminer la mesure principale des angles, puis les placer sur le cercle trigonométrique ci-joint.

1. $\frac{23\pi}{4}$
2. $\frac{-20\pi}{3}$
3. $\frac{37\pi}{8}$
4. $\frac{-41\pi}{6}$



Exercice 2

1. Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, placer le point M associé à la valeur $\frac{\pi}{6}$.
2. Placer ensuite les points M_1, M_2 et M_3 associés aux valeurs $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{9\pi}{6}$, et $\frac{-\pi}{6}$.
3. Rappeler le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{6}$.
4. En déduire les cosinus et sinus de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{9\pi}{6}$, et $\frac{-\pi}{6}$.

Exercice 3

1. En utilisant les angles associés, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:
   a) $A = \sin(x+\pi) + \cos(x+\frac{\pi}{2}) + \sin x - \sin(-x)$
   b) $B = \cos x - \cos(x-\frac{\pi}{2}) - \sin(x-\pi) + \cos(\pi - x)$
2. Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles associés :
   a) $C = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{23\pi}{14}$
   b) $D = \sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{11\pi}{5}$

Exercice 4

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. Sur $[0; 3\pi[$: $\cos x = \cos(-\frac{2\pi}{3})$
2. Sur $]-\pi; \pi]$: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Sur $[0; 4\pi[$: $\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{5}$
4. Sur $]-\pi; \pi]$: $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{4}$
5. Sur $]-\pi; \pi]$: $\cos x > \frac{-\sqrt{2}}{2}$
6. Sur $]-\pi; 2\pi]$: $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. Sur $[0; 2\pi[$: $\sin^2 x = \frac{1}{2}$
8. Sur $]-\pi; \pi]$: $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Exercice 5

En utilisant les angles associés, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

1. $A = \cos(x-\pi) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$
2. $B = \sin x + \cos(x+\frac{\pi}{2}) + \cos x - \sin(x+\frac{\pi}{2})$

Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles associés :

3. $C = \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{11\pi}{8} + \sin\frac{13\pi}{8}$
4. $D = \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{9\pi}{10}$

Exercice 6

Soient $x \in [-\pi; \frac{\pi}{2}]$ et M le point du cercle trigonométrique associé à x.

1. Sur le cercle trigonométrique, placer M tel que $cos(x) = -\frac{3}{4}$.

2. Calculer $sin(x)$.

3. Calculer :

a. $cos(\frac{\pi}{2} + x)$ **b.** $sin(\frac{\pi}{2} - x)$ **c.** $cos(\pi + x)$ **d.** $sin(\pi - x)$

Exercice 7

Compléter avec $\cos x$, $\sin x$, $-\cos x$ ou $-\sin x$:

$\cos(-x)=...$ $\cos(\pi-x)=...$ $\cos(\pi+x)=...$

$\sin(-x)=...$ $\sin(\pi-x)=...$ $\sin(\pi+x)=...$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=...$ $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=...$

$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=...$ $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=...$

Exercice 8

On sait d'un réel x que $x \in [0 ; \pi]$ et $\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Déterminer la valeur exacte de $\sin x$.
2. On sait que le réel x cherché est l'un des réels $\left\{-\frac{4\pi}{5}; -\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}\right\}$. Qui est x ? Justifier.

Exercice 9

Résoudre l'équation trigonométrique $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in [-\pi ; 3\pi]$.

Exercice 10

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique $4x = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
2. Placer sur le cercle trigonométrique les points repérés par ces solutions.

Exercice 11

Soit x un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. M est le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associé à x.

1. Placer le point M tel que $\sin x = \frac{2}{5}$.
2. Placer les points A, B, C et D du cercle associés aux réels $\frac{\pi}{2} + x$, $\frac{\pi}{2} - x$, $\pi + x$ et $\pi - x$.
3. Calculer $\cos x$.
4. Donner les valeurs de :

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; (b) $\sin(\pi - x)$; (c) $\cos(\pi + x)$.

Exercice 12

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. Sur $[0; 3\pi[$: $\cos x = \frac{1}{2}$
2. Sur $]-\pi; \pi]$: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. Sur $[0; 4\pi[$: $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$
4. Sur $[0; 2\pi[$: $\cos^2 x = \frac{3}{4}$
5. Sur $]-\pi; \pi]$: $6 - 12\cos x > 0$
6. Sur $]-\pi; 2\pi]$: $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$
7. Sur $]-\pi; \pi]$: $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
8. Sur $]-\pi; \pi]$: $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{4}$

Exercice 13

1. Résoudre dans $[0; 2\pi[$:

(a) $\cos x = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)$; (b) $\sin x = \sin\frac{2\pi}{3}$

2. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$:

(a) $\cos x = \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$; (b) $\sin x = \sin\frac{4\pi}{3}$

Exercice 14

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous puis déterminer leurs solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$:

a) $\cos s = \frac{1}{2}$ *b)* $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 = 0$

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $[-\pi ; \pi]$ par $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)-\sin(x)$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Montrer que la fonction f est impaire . Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. Démontrer que pour tout x réel $f'(x)=2\cos^2(x)-\cos(x)-1$.
3. Factoriser $2X^2-X-1$.
   En déduire le signe du signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$
4. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$
5. Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0; \pi]$ puis sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$

Exercice 16

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to -\sin(x) \cdot \cos(x)$

1. Montrer que *f* est impaire et π-périodique
2. Montrer que pour tout réel x $f'(x)=2\left(\sin(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
3. Dresser le tableau de variation de *f* sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
4. Déterminer l'intersection de la courbe *f* avec chacun des axes
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de *f* à l'origine
6. Tracer la courbe de *f* pour $x \in [-2\pi ; 2\pi]$

Exercice 17

Soit $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to (1+\cos(x)) \cdot \cos(x)$ et C sa courbe représentative

1. Rappeler les propriétés de parité et de périodicité de la fonction cosinus.
2. Etudier la parité et la périodicité de h.
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ h'(x)=-(1+2 \cdot cosx) \cdot \sin x$.
4. Résoudre $1+\cos x=0$ puis $1+\cos x>0$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.
5. Dresser le tableau de signes de $h'(x)$ pour $x \in [0; \pi]$; en déduire le tableau de variations de h sur cet intervalle.
6. Expliquer comment on peut déduire de la question (2) la courbe de C sur $\mathbb{R}$ à partir de la courbe sur $[0; \pi]$.
7. Représenter la courbe C sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

Exercice 18

Soit g la fonction définie pour $x \in [-2\pi ; 2\pi]$ par $g(x)=\sqrt{2}x+2\sin(x)$

1. Démontrer que g est une fonction impaire.

2. Justifier brièvement la dérivabilité de g et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in [0 ; 2\pi]$.

3. Dresser le tableau de signes de $g'(x)$ puis le tableau de variations de pour $x \in [0 ; 2\pi]$

4. Déduire des questions 1. et 2. le tableau de variations de g sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-3 \leq f(x) \leq 3$
2) Déterminer la parité de la fonction f
3) Montrer que pour tout $\in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = f(x)$. En déduire que f est périodique et préciser sa période.
4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -6\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$
5) a) Montrer que si $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$,$2x+\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$. En déduire le signe de f'sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$
   c) Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$
6) Donner l'équation de la tangente en f au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$

Exercice 20

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x \cdot (1+\cos x)$

1. Démontrer que f est impaire et périodique. En déduire que l'on peut restreindre l'étude sur $[0; \pi]$
2. Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$
3. Donner l'allure de la courbe sur $[-2\pi ; 2\pi]$

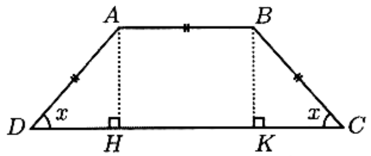
Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$

1. On appelle g la fonction définie sur I par $g(x) = \tan x - x$
   a. Déterminer les limites de g aux bornes de I.
   b. Etudier les variations de g.
   c. Calculer $g(0)$ et déterminer le signe de $g(x)$ sur I.
2. a. Justifier que f est dérivable sur I et calculer f'
   b. Factoriser $f'(x)$ pour tout x de I puis en utilisant la question 1, déterminer le signe de $f'(x)$ sur I.
   c. Déterminer les variations de f sur I. En déduire le signe de f sur I.

Exercice 22

On considère le trapèze isocèle $ABCD$ ci-dessous où $AD = AB = BC = 1$.
On note x la mesure en radians des angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{BCD}$.



Le but de l'exercice est de trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du trapèze est maximum.

1. Exprimer la hauteur h du trapèze en fonction de x.
2. Démontrer que l'aire $\mathscr{A}$ du trapèze est définie, pour $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :
$$\mathscr{A}(x) = \sin(x)(1 + \cos(x)).$$
3. Démontrer que la dérivée $\mathscr{A}'$ de la fonction $\mathscr{A}$ est définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :
$$\mathscr{A}'(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1.$$
4. Factoriser le trinôme $2X^2 + X - 1$ et en déduire une factorisation de $\mathscr{A}'(x)$.
5. Etudier le signe de $\mathscr{A}'(x)$ et dresser le tableau de variation de $\mathscr{A}$.
6. Conclure.

Exercice 23

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ où x désigne un réel.

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal où 3 cm représente π sur l'axe des abscisses et 2cm représente une unité sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que, pour tout réel x, le dénominateur $2 + \cos x$ ne s'annule jamais.
2. a. Démontrer que f est périodique de période 2π.
   b. Démontrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
   c. A l'aide des deux questions précédentes démontrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$.
3. a. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}$.
   b. Etudier le signe de f' sur $[0 ; \pi]$.
   c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$.
4. Dans le repère décrit ci-dessus représenter $\mathscr{C}$ restreinte à l'intervalle $[-\pi ; 3\pi]$.

Exercice 24

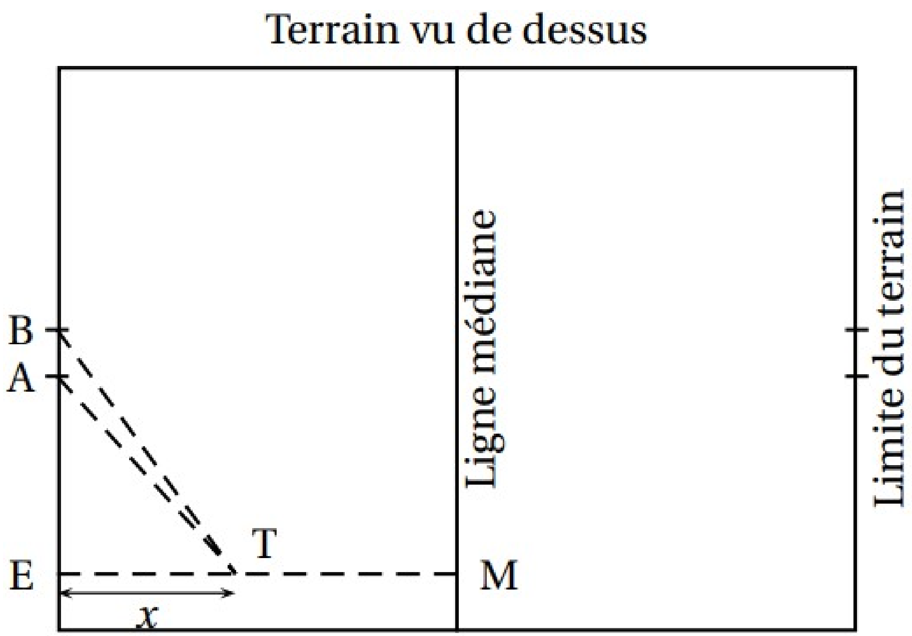
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

1. Démontrer que *f(x)* est 4π-périodique et que par conséquent l'étude de la fonction f peut être restreint à l'intervalle I=[0 ;4π].
2. Etudier les variations de f sur I.
3. Démontrer que f admet plusieurs tangentes horizontales sur I. Donner leur équation.
4. Représenter f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ pour x appartenant à [0 ;4π].
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 25

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB]. La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.
Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.
Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.
Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et de γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.



1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure de γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.
On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\tan(a-b)=\frac{(\tan a-\tan b)}{(1+\tan a\cdot\tan b)}$$

Montrer que $\tan\gamma=\frac{5{,}6\,x}{x^2+765}$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle]0; 50] de la fonction f définie par :

$$f(x)=x+\frac{765}{x}$$

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

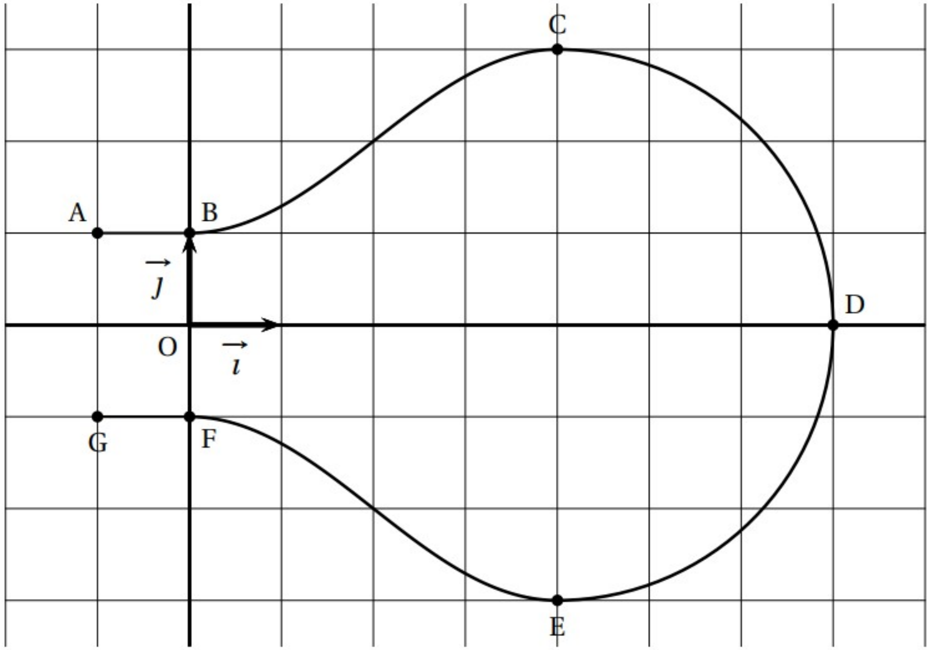
Exercice *26*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère les points :

A(−1 ; 1), B(0; 1), C(4; 3), D(7; 0), E(4 ; −3), F(*O* ; −1) et G(−1 ; −1).

On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-après :



• La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :

• la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante h définie sur l'intervalle [−1 ; 0] par $h(x) = 1$;

La portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle [0; 4] par $f(x)=a+b\sin\left(c+\frac{\pi}{4}x\right)$, où a, b et c sont des réels non nuls fixés et où le réel c appartient à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

• la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre [CE].

La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

1. a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x de l'intervalle [0; 4], déterminer $f'(x)$.

b. On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel c.

2. Déterminer les réels a et b.