# Probabilités conditionnelles et indépendance – Fiche de cours

## 1. Probabilités – Variable aléatoire

### 1.1. Vocabulaire et propriétés des événements

$\varnothing$ est appelé événement impossible
$\Omega$ (univers) est appelé événement certain
$A \cap B$ est l'événement « A et B »
$A \cup B$ est l'événement « A ou B »
$\overline{A}$ est appelé événement contraire de A
2 événements sont incompatibles lorsque $A \cap B = \varnothing$

### 1.2. Probabilité d'un événement

Une expérience aléatoire est constituée par plusieurs issues possibles qui dépendent du hasard.

Soit $\Omega$ un univers mathématique représentant l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

Définition

Soit A un événement tel que $A \subset \Omega$
On définit la probabilité d'un événement A par :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} \qquad \text{avec } 0 \leq p(A) \leq 1$$

Equiprobabilité

Si l'univers $\Omega$ est constitué de n issues qui ont la même probabilité alors :

$$p = \frac{1}{n}$$

Formules

Soit A et B deux événements tel que $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

## 2. Conditionnement

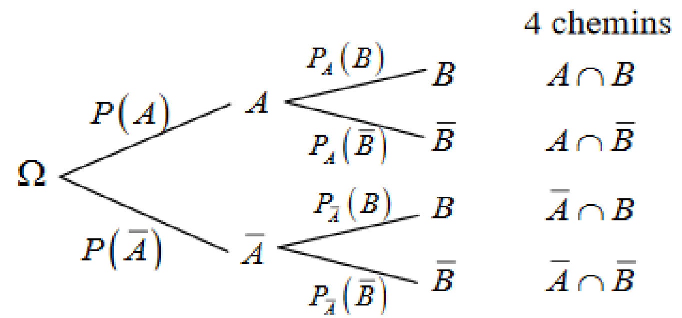
### a. Probabilités conditionnelles

Définition

Soient A et B deux événements d'un univers $\Omega$
On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant B le réel :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### b. Arbre pondéré




Les branches sont pondérées par des probabilités conditionnelles
La somme des probabilités issues d'un même sommet (ou partition) est égale à 1

# 3. Indépendance

## a. Evénements indépendants

Définition :

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle
A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre :

Deux événements A et B sont indépendants ssi :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Lorsque A et B sont deux événements indépendants, alors :

- $\overline{A}$ et $B$ sont indépendants
- $A$ et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

## b. Probabilités totales

Partition :

Les événements $A_1, A_2, \dots A_n$ forment une partition d'un univers $\Omega$ ssi :

- les événements $A_1, A_2, \dots A_n$ sont 2 à 2 disjoints
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n = \Omega$

Définition :

Soit $A_1, A_2, \dots A_n$ une partition d'un univers $\Omega$, alors :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$