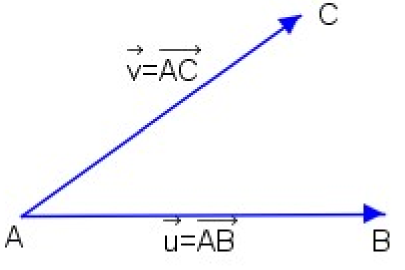
Produit scalaire – Fiche de cours

1. Le produit scalaire

a. Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel suivant :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$$

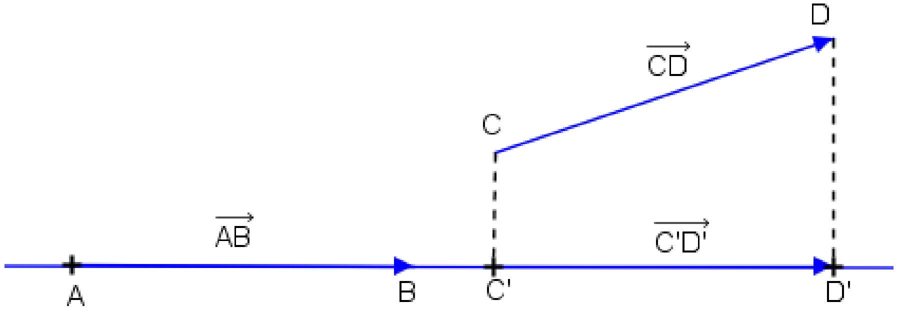


b. Autres expressions du produit scalaire

- projeté orthogonal

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs, C et D se projettent orthogonalement en C′ et D′ sur la droite (AB). On a alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}=\overline{AB}\cdot\overline{C'D'}$$



- définition analytique

Si dans un repère orthonormal, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x,y) et (x′,y′) alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

- définition de la norme

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peut être défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

On pourra utiliser la relation suivante :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

c. Propriétés de bilinéarité

- symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- bilinéarité : pour tous réels a et b

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(a\cdot\vec{u})\cdot(b\cdot\vec{v})=a\cdot b\times\vec{u}\cdot\vec{v}$

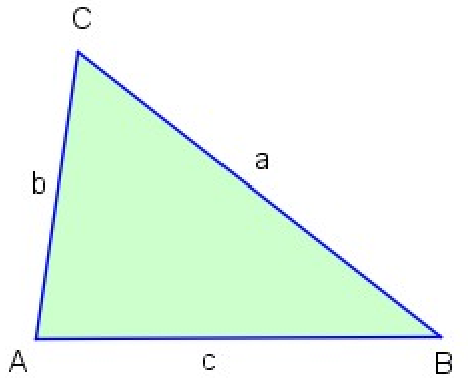
d. Critère d'orthogonalité

$$\begin{cases}\vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0}\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=0\end{cases} \Leftrightarrow \vec{u}\ et\ \vec{v} \text{ orthogonaux}$$

2. Relations métriques dans un triangle

- Relations d'Al-Kashi

Soit un triangle ABC

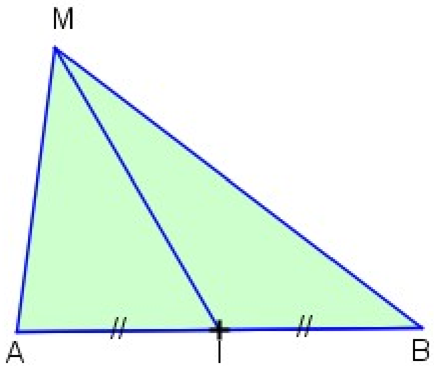


$$a^2=b^2+c^2-2\cdot bc\cdot\cos\widehat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot ac\cdot\cos\widehat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot ab\cdot\cos\widehat{C}$$

- Théorème de la médiane

Soit I le milieu de [AB] et M un point du plan. On a alors :

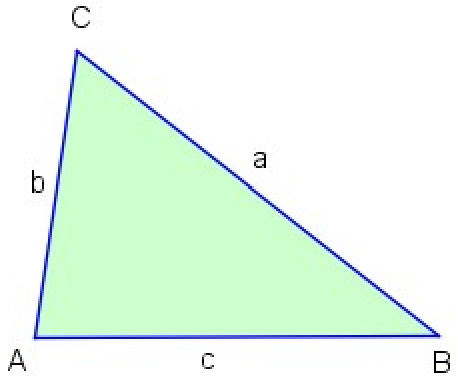
$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=2\,MI^2+\frac{AB^2}{2}$$



- Formule des sinus

La surface d'un triangle est définie par :

$$S=\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin\widehat{A}$$



Une conséquence directe de la formule des aires est :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

3. Lieux de points

- Lignes de niveaux

Résoudre une ligne de niveau de valeur le réel *k* consiste à caractériser l'ensemble des points M du plan tel que f(M)=k

Exemple :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=100$$