

# Variables aléatoires réelles – Exercices – Devoirs

## Exercice 1 corrigé disponible

Voici trois lois de probabilités et trois couples d'espérance et d'écart type, associez-les sans justification.

Loi de probabilité				Espérance Écart type	
A	$x_i$	8	14	E	$E(X)=11 \quad \sigma(X) \approx 1,73$
	$p(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		
B	$x_i$	8	12	F	$E(X)=10 \quad \sigma(X) \approx 0,85$
	$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$		
C	$x_i$	4	10	G	$E(X)=10 \quad \sigma(X) \approx 2,83$
	$p(X=x_i)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{98}{100}$		

2. Donner les lignes d'une fonction Python :

- `def E(X)` retourne l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X
- `def V(X)` retourne la variance d'une variable aléatoire X

## Exercice 2 corrigé disponible

On considère un dé fantaisiste dont les faces sont marquées de la façon suivante :

- le premier dé : 1, 2, 2, 3, 4, 4

Soit X la variable aléatoire qui indique le numéro du dé

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer E(X) et V(X)

3. Calculer  $E(3X-2)$  ;  $V(3X-2)$  ;  $\sigma(3X-2)$

4. Donner les lignes d'une fonction Python simulant n expériences aléatoires indépendantes et indiquant une estimation de E(X)

La fonction retournera la moyenne statistique  $m$  lors d'un échantillonnage de taille n de la loi X

5. Donner les lignes d'une fonction Python permettant d'estimer lors de n expériences aléatoires indépendantes la proportion des valeurs de m de la question 4. vérifiant la condition de fluctuation suivante :

$$|m - E(X)| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad E(X) - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq E(X) + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

## Exercice 3 corrigé disponible

On met en place une loterie sans mise initiale. Le jeu consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Si c'est 7, 8, 9 ou 10 on perd 10 €, si c'est une figure (valet, dame ou roi) on gagne 10 €, si c'est un as on gagne 20 €.

Notons X, la variable aléatoire représentant le gain en euros à l'issue d'un tirage.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X
- 3) Calculer E(X) et interpréter le résultat obtenu.
- 4) Cette loterie est-elle défavorable pour l'utilisateur ? Justifier.
- 5) L'organisateur prend la décision de mettre en place une mise initiale à payer par le candidat.

Quelle doit être le montant en euros de cette mise pour que la loterie soit équitable ?

## Exercice 4 corrigé disponible

Une urne contient une boule rouge et  $n$  boules blanches.

On tire **successivement et avec remise** deux boules de l'urne.

1. Exprimer en fonction de  $n$  la probabilité des événements suivants :

M : « Les deux boules sont de la même couleur »

N : « Les deux boules sont de couleur différente »

2. On considère le jeu suivant : le joueur perd  $(n + 1)^2$  euros si M est réalisé et gagne  $2(n + 1)^2$  euros sinon. On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.

(a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

(b) Démontrer que  $E(X) = -n^2 + 4n - 1$ .

Pour les questions suivantes toute trace de recherche et de raisonnement seront pris en compte.

(c) Pour quelles valeurs de  $n$  le jeu est favorable au joueur ?

(d) Si on laisse choisir au joueur le nombre de boules blanches, que doit-il répondre ?

On suppose que  $n=2$  boules blanches

3. Calculer  $E(X)$ ,  $V(X)$ ,  $E(-X+1)$ ,  $V(-X+1)$

## Exercice 5 corrigé disponible

Le coût de production d'un objet est de 950 euros.

Cet objet peut présenter un défaut A, un défaut B, ou bien en même temps le défaut A et le défaut B.

La garantie permet de faire des réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :

100 euros pour le défaut A et 150 euros pour le défaut B.

On admet que 90% des objets produits n'ont aucun défaut, 5% ont au moins le défaut A, et 4% ont les deux défauts A et B.

1. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est-à-dire son coût de production augmenté du coût de réparation éventuel.

Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

2. Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  de cette variable aléatoire.

Que représente  $E(X)$  pour l'usine ?

3. On admet que tous les objets produits sont vendus.

(a) L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 euros chaque objet vendu ?

(b) L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 100 euros par objet.

Expliquer comment doit-on alors choisir le prix de vente de l'objet produit.

4. Calculer  $\sigma(X)$

## Exercice 6 corrigé disponible

Lors d'un jeu A, la variable aléatoire  $X$  qui représente le gain (en €), suit la loi de probabilité résumée dans le tableau ci-dessous :

Valeurs $i$ de $X$	- 10	0	5	10	15
$p(X = i)$	0,6	0,2	0,15	0,04	0,01

- 1) Calculer l'espérance et la variance de  $X$ . Le jeu est-il équitable ?

- 2) Dans un autre jeu B, l'espérance de gain est  $-4,7$  et sa variance 100. Marine croit à sa bonne étoile, quel jeu choisira-t-elle ?

## Exercice 7 corrigé disponible

1. Au jeu de la Boule, on peut miser sur un numéro parmi les neuf numéros 1 à 9 du tapis de jeu. Si la boule lancée par le croupier s'arrête dans le godet portant le numéro misé, on récupère la mise et on gagne sept fois celle-ci. Sinon, le casino garde la mise. On suppose que les neuf résultats sont équiprobables. Un joueur mise 10 € sur le numéro 1.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce joueur.

a) Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ?

b) Calculer  $E(X)$  ?

2. On peut aussi miser sur « pair » ou sur « impair ». Si l'on mise sur « pair », on gagne si la boule s'arrête sur le 2, le 4, le 6 ou le 8. Si l'on mise sur « impair », on gagne si la boule s'arrête sur le 1, le 3, le 7 ou le 9 (le 5, bien qu'impair, ne permet pas de gagner). Si l'on gagne, on remporte une fois sa mise et on récupère celle-ci. Sinon, le casino garde la mise. Un joueur mise 10 € un jeton sur « pair ».

On note  $Y$  la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce joueur.

a) Quelle est la loi de probabilité de  $Y$  ?

b) Calculer  $E(Y)$ .

3. Comparer  $E(X)$  et  $E(Y)$ . Quel commentaire pouvez-vous faire ?