Variables aléatoires réelles – Fiche de cours

1. Probabilités – Variable aléatoire

1.1. Vocabulaire et propriétés des événements

Ω (univers) est appelé événement certain
$\emptyset$ est appelé événement impossible
$A \cap B$ est l'événement « A et B »
$A \cup B$ est l'événement « A ou B »
$\overline{A}$ est appelé événement contraire de A
2 événements sont incompatibles lorsque $A \cap \overline{A} = \emptyset$

1.2. Probabilité d'un événement

Une expérience aléatoire est constituée par plusieurs issues possibles qui dépendent du hasard.

Soit Ω un univers mathématique représentant l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

Définition

Soit A un événement tel que A $A \subset \Omega$
On définit la probabilité d'un événement A par :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}} \quad \text{et} \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Equiprobabilité

Si l'univers est constitué de n issues qui ont la même probabilité alors :

$$p = \frac{1}{n}$$

Formules

Soit A et B deux événements tel que $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{et} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

1.3. Variable aléatoire et loi de probabilité

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.
On appelle variable aléatoire réelle X une fonction définie de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$
On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la fonction qui à chaque valeur x_i associe la probabilité de l'événement $P(X = x_i)$
On peut résumer les résultats dans un tableau

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

1.4. Paramètres d'une variable aléatoire

1.4.1. Espérance mathématique

On appelle espérance mathématique :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

si E(X) > 0 , l'expérience aléatoire est favorable
si E(X) = 0 , l'expérience aléatoire est équitable
si E(X) < 0 , l'expérience aléatoire est défavorable

1.4.2. Variance et écart type

On appelle variance : $V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 \cdot p_i = E(X^2) - E(X)^2$

On appelle écart type : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

1.4.3. Formules sur l'espérance et la variance

Soit X une variable aléatoire définie sur et a et b deux réels
On construit une nouvelle variable aléatoire Y :

$$Y = aX + b$$

Soit X la variable aléatoire d'espérance E(X) et de variance V(X)
Pour tout nombre a et b :
E(Y) = E (aX + b) = a.E(X) + b V(Y) =V(aX + b) = a^2. V(X)