Fonctions de référence – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Soit f la fonction carrée définie pour tout réel x par $f(x)=x^2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Représenter C_f pour $x\in[-4;4]$
2. Résoudre graphiquement puis par le calcul les équations et inéquations suivantes :
   - $f(x)=5$ - $f(x)=-10$ - $f(x)=0$
   - $f(x)\geq-1$ - $f(x)<0$ - $f(x)<7$
3. Donner un encadrement de f(x) dans les cas suivants :
   - $x\in]-\infty\ ;-1\ ]$ - $x\in]2\ ;\ 4\ ]$ - $x\in]-2\ ;\ 3\ ]$
4. On donne $f(3)=9$; écrire une phase équivalente avec le terme suivant :
   a. antécédent b. équation c. image
5. Déterminer l'équation de la droite d passant par les points $A(1;1)$ et $B(-2;4)$; on notera h(x) la fonction associée
6. Résoudre graphiquement $f(x)=h(x)$
7. Démontrer que $f(x)-h(x)=(x-1)(x+2)$
8. En utilisant la question précédente étudier la position relative de C_f et d selon les valeurs de x.

Exercice 2 corrigé disponible

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+4x-5$

1. Calculer l'image de 0 et de -2 par f.
2. Déterminer le ou les antécédents éventuels de -5.
3. Montrer que l'on a $f(x)=(x+2)^2-9$; en déduire une factorisation de f(x).
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.
5. Montrer que $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1+4)$. En déduire que f est croissante sur $[-2;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;-2]$. Construire le tableau de variation et précisez le minimum.

Exercice 3 corrigé disponible

Soit x un nombre réel

1. L'affirmation si $x^2\geq9$ alors $x\geq3$ est-elle vraie ?
2. Ecrire une proposition équivalente à $x^2\geq9$

Exercice 4 corrigé disponible

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-3)^2=25$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(1-2x)^2\geq9$

Exercice 5 corrigé disponible

1. Résoudre les équations suivantes :
   a. $x^2-4-(x+2)(3x-1)=0$
   b. $(x-2)^2-(3x-1)^2=0$
   c. $x^2-16=(x-4)^2(x+5)$
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   a. $x^2<5x$
   b. $x^2>49$

Exercice 6 corrigé disponible

Pour chaque cas, donner un encadrement de x^2 :

1. $-2<x\leq7$
2. $x>3$
3. $-6\leq x<3$
4. $x<-2$

Exercice 7 **corrigé disponible**

Soit *f* la fonction définie sur $[-3;3]$ par $f(x)=x^2+x-2$

On donne sa représentation graphique dans un repère orthogonal

1. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

   a. $f(x)=0$ b. $f(x)=-2$ c. $f(x)\leq 0$

2. Tracer dans le même repère la droite représentant la fonction g définie sur $[-2;1]$ par $g(x)=-x+1$.

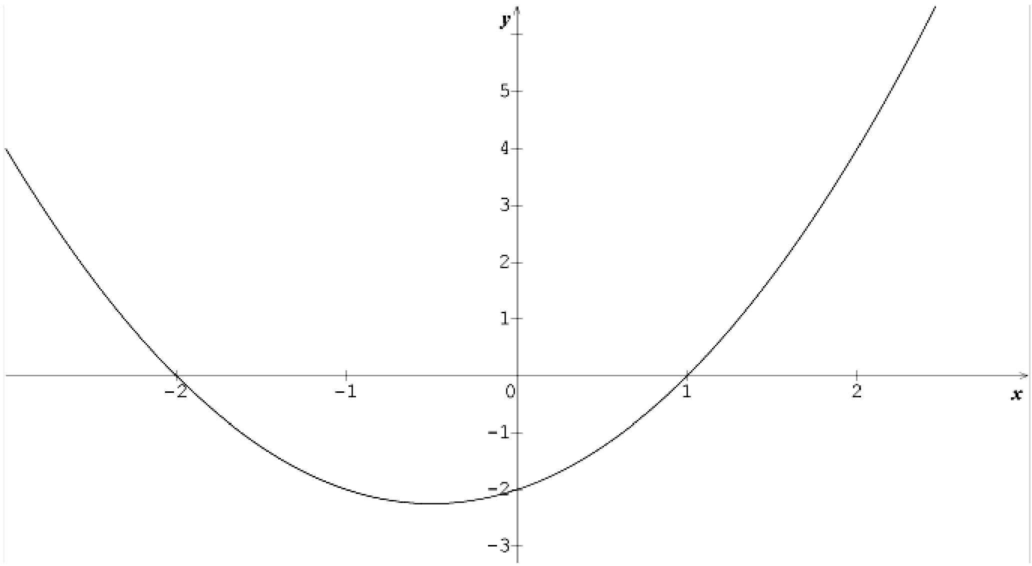
   En déduire les solutions de l'équation : $f(x)=-x+1$

3. Déterminer par le calcul les antécédents de -2 par f(x)

4. a. Vérifier que l'on a pour tout x $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

   b. En déduire la résolution par le calcul de l'équation $f(x)=0$

   c. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x)\leq 0$



Exercice 8 corrigé disponible

Soit la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}$

1. Quel est le domaine de définition de $f(x)$?
2. Démontrer le sens de variation de la fonction racine carrée.
3. Comparer $f(3)$ et $f(\pi)$; justifier

Soit les fonctions $h(x)=\sqrt{(x+1)}$ $k(x)=\sqrt{(x)}+1$ $\forall x\in[0;+\infty[$

4. Comparer $h(x)$ et $k(x)$; justifier.
5. Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
6. Indiquer la (les) réponse(s) correcte(s) en justifiant :
   a. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geq 1$
   b. $\sqrt{3}-\sqrt{2}\leq 1$
   c. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geq 1$
7. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{N}$ b étant le plus petit possible :
   $A=-5\sqrt{28}+5\sqrt{63}-\sqrt{112}$ $B=\sqrt{160}\times\sqrt{40}\times\sqrt{90}$
8. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{Z}$ $c\in\mathbb{N}$ c étant le plus petit possible :
   $A=(4\sqrt{5}-3\sqrt{6})^2$ $B=(2\sqrt{10}+4\sqrt{6})^2$
9. Ecrire sans racine carrée au dénominateur :
   $A=\dfrac{2+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$
10. Calculer ou résoudre en justifiant :
   a. $\sqrt{\left(\pi-\dfrac{7}{2}\right)^2}$ b. $\sqrt{x-5}=3$ c. $\sqrt{(x-5)^2}=3$

Exercice 9

1. Montrer que $\sqrt{2}+1$ est l'inverse de $\sqrt{2}-1$
2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{Z}$ $c\in\mathbb{N}$ c étant le plus petit possible :
   - $\sqrt{28}\times\sqrt{63}\times\sqrt{12}$
   - $(5\sqrt{3}-7\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{3})$
   - $(4\sqrt{7}+2)\cdot(3-\sqrt{7})-10\sqrt{7}$
   - $\dfrac{(2\sqrt{7}-3\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$
   - $(\sqrt{3}+5)^2+(\sqrt{3}-5)^2$
3. Le nombre d'or est défini par $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

   Ce nombre est solution de l'équation $x^2=x+1$

   Calculer ϕ^2 et $\phi+1$. Conclure
4. Résoudre :
   a. $\sqrt{(x-4)^2}=-1$ b. $\sqrt{(3-x)^2}=\sqrt{64}$ c. $\sqrt{2x-1}=x$

Exercice 10

1. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b le plus petit possible :
   $A=-5\sqrt{12}+2\sqrt{48}+2\sqrt{27}$ $B=\sqrt{112}\times\sqrt{28}\times\sqrt{63}$
2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers :
   $C=(2\sqrt{7}+3\sqrt{10})^2$ $D=(\sqrt{5}-2\sqrt{11})^2$
3. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'un nombre entier :
   $E=(4-3\sqrt{5})(4+3\sqrt{5})$ $F=\dfrac{16\sqrt{18}}{6\sqrt{32}}$

Exercice 11 **corrigé disponible**

Soit la fonction définie par $f(x)=x^3$

1. Quel est le domaine de définition de $f(x)$?

2. Etude des variations

On suppose que $0 \leq a < b$:

a. Quel est le signe de $a-b$?

b. Déterminer $f(a)$ et $f(b)$ et les comparer.

On utilise l'identité remarquable : $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

c. Quel est alors le sens de variation de la fonction cubique sur $[0;+\infty[$

On suppose que $a < b \leq 0$:

d. Quel est le signe de $a-b$?

e. Déterminer $f(a)$ et $f(b)$ et les comparer.

f. Quel est alors le sens de variation de la fonction cubique sur $]-\infty;0]$.

Cas général

g. Dresser le tableau de variation de la fonction cube sur $\mathbb{R}$.

3. Comparer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f(\sqrt{2})$; justifier

Soit la fonction $g(x)=3x^2-3x+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

4. Comparer $f(x)$ et $g(x)$; que peut-on en déduire pour la position relative des courbes représentatives de $f(x)$ et $g(x)$?

Exercice 12 **corrigé disponible**

1. Représenter dans un repère orthonormal du plan la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ pour $x\in[-5;5]$

2. Compléter :

- si $x<-1$ alors $\ldots<\frac{1}{x}<\ldots$

- si $1\leq x\leq 2$ alors $\ldots<\frac{1}{x}<\ldots$

3. Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$:

- $\frac{1}{x}=-3$ - $\frac{1}{x}\geq 2$ - $\frac{1}{x}\leq 1$

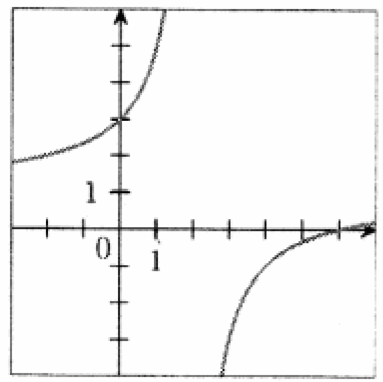
4. Retrouver graphiquement les résultats de la question 3.

Exercice 13

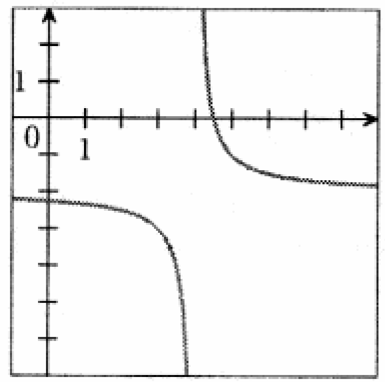
Associer à chaque fonction sa représentation graphique :

- $f(x)=\frac{1}{(x-2)}-4$ - $g(x)=\frac{1}{(x-4)}-2$
- $h(x)=\frac{-4}{(x-2)}+1$ - $i(x)=\frac{-2}{(x-4)}+1$

1.



2.



Exercice 14

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x)=1-\frac{6}{x+2}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
2. a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$
   b) On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$. Donner le tableau de variations de la fonction f.
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-1)=-3$ et $g(3)=1$.
   Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x.
4. a) Montrer pour tout réel $x\neq -2$, $f(x)-g(x)=\frac{x-x^2}{x+2}$.
   b) Résoudre l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$.

Exercice 15

1. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} > 4$
2. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \geq -3$
3. Résoudre l'inéquation $1 \leq x^3 < 27$
4. Résoudre l'inéquation $x^3 > 8$

Exercice 16

Un rectangle a une aire égale à $60m^2$. On note x la largeur et y la longueur, en m de ce rectangle.

1. Exprimer la longueur y en fonction de x
2. Déterminer la largeur x lorsque $y = 24$
3. On souhaite que la longueur de ce rectangle soit telle que $y \leq 10$
   Montrer que sa largeur doit être telle que $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{6}$
   Déterminer graphiquement les valeurs possibles de x

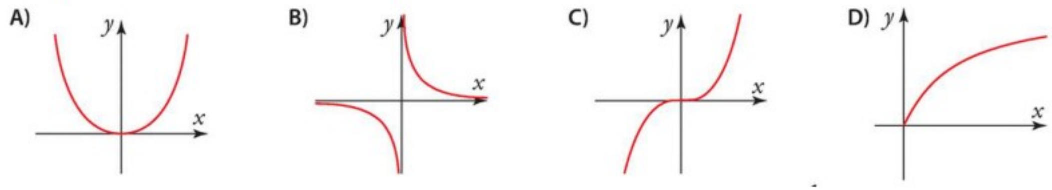
Exercice 17

Calculer l'image de chaque nombre par la fonction cube

1. 3
2. -1
3. $-\frac{2}{3}$
4. $\frac{5}{2}$

Exercice 18

Retrouver à quelle fonction, à quel ensemble de définition et à quelle expression littérale correspond chacune des courbes représentatives des fonctions de référence suivantes.



1. fonction inverse 2. fonction cube 3. fonction racine carrée 4. fonction carré	a) définie sur $[\,0\,;\,+\infty[$ b) définie sur $\mathbb{R}$ c) définie sur $\mathbb{R}^*$ d) définie sur $\mathbb{R}$	I) $f(x) = \frac{1}{x}$ II) $h(x) = x^3$ III) $g(x) = \sqrt{x}$ IV) $i(x) = x^2$

A) ____________________ B) __________________ C) __________________ D) ________________