

Nombres réels – Fiche de cours

1. Rappels du collège

a. Ensemble des entiers naturels \mathbb{N}

L'ensemble des entiers naturels se note \mathbb{N} . Il s'agit des valeurs entières positives.

On utilise la notation suivante : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 \dots\}$

b. Ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z}

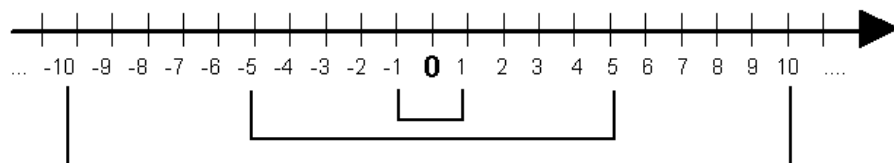
L'ensemble des entiers relatifs se note \mathbb{Z} . Il s'agit des valeurs entières positives et négatives.

On utilise la notation suivante : $\mathbb{Z} = \{\dots -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 \dots\}$

2. Ensemble des nombres réels \mathbb{R}

a. La droite numérique

La droite numérique représente un ensemble continu et dense de points. Chacun de ses points a une abscisse ou adresse correspondant à un nombre réel.



b. Notations $+\infty$ et $-\infty$

L'infini est une notion ou un concept qui n'a pas d'équivalent dans le monde physique. Il est noté ∞ .

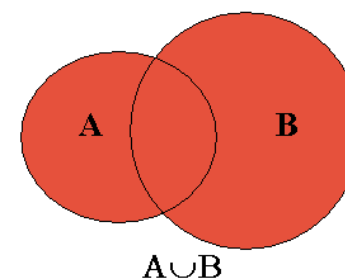
c. Les intervalles de \mathbb{R}

L'intervalle noté ...	est l'ensemble des réels x tels que ...	Représentation de cet intervalle sur une droite graduée
$[a ; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a ; b[$	$a < x < b$	
$]a ; b]$	$a < x \leq b$	
$[a ; b[$	$a \leq x < b$	
$[a ; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a ; +\infty[$	$a < x$	
$]-\infty ; b]$	$x \leq b$	
$]-\infty ; b[$	$x < b$	

d. La réunion d'intervalles

Soit A et B deux intervalles. La réunion des intervalles A et B est définie par :

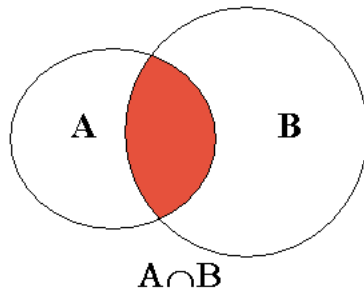
- L'ensemble des nombres réels qui appartiennent à « A **ou** à B ».
- La notation $A \cup B$.



e. L'intersection d'intervalles

Soit A et B deux intervalles. L'intersection des intervalles A et B est définie par :

- L'ensemble des nombres réels qui appartiennent à « A **et** à B ».
- La notation $A \cap B$.



3. Les valeurs absolues

a. La notation | |

- $|x| = x$ si $x \geq 0$
- $|x| = -x$ si $x < 0$

b. Propriétés

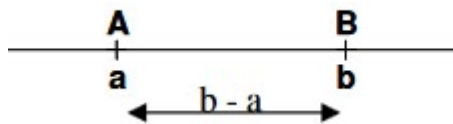
Soit x et y deux nombres réels

$$\begin{array}{ll}
 |x| \geq 0 & |-x| = |x| \\
 \sqrt{x^2} = |x| & |x| = |y| \text{ équivaut à } x=y \text{ ou } x=-y \\
 |x \times y| = |x| \cdot |y| & \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ ssi } y \neq 0
 \end{array}$$

c. Distance et valeur absolue

Soit a et b deux nombres réels. Sur la droite graduée, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives a et b est le nombre :

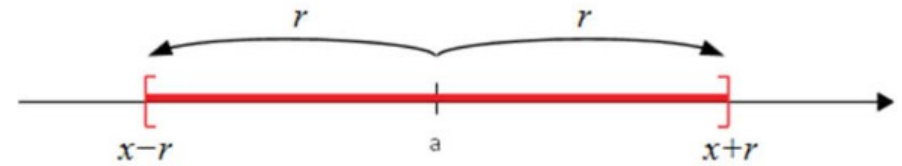
$$AB = d(a; b) = |b - a|$$



Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}$

Dire que x est tel que $|x - a| \leq r$ signifie que $x \in [a - r; a + r]$



4. Ensemble des nombres décimaux \mathcal{D} , rationnels \mathbb{Q} , et réels \mathbb{R}

a. Les nombres décimaux

Les nombres décimaux \mathcal{D} sont définis par :

$$\frac{a}{10^n} \quad \text{avec } a \in \mathbb{Z}$$

b. Les nombres rationnels

Les nombres rationnels sont définis par :

$$\frac{a}{b} \text{ fraction irréductible avec } a \in \mathbb{Z} \text{ } b \in \mathbb{N}^*$$

c. Les nombres réels

- **nombres irrationnels**

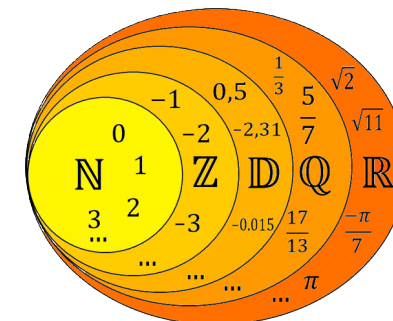
Les nombres réels \mathbb{R} qui ne sont pas rationnels sont irrationnels

Exemple : $\sqrt{2}$ π

- **classification des nombres**

Les ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



5. Multiples et diviseurs

Soient a et b deux nombres entiers non nuls.

Si l'on a : $a = k \times b$ avec k nombre entier

On dit que :

- a est un multiple de b
- b est un diviseur de a

Vocabulaire :

PGCD : plus grand commun diviseur

PPCM : plus petit commun multiple

Méthode : Déterminer tous les diviseurs d'un nombre entier N

On teste la division entière avec tous les nombres entiers compris entre 1 et \sqrt{N}

6. Critères de divisibilité

- divisibilité par 2 : le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 (nombre pair)
- divisibilité par 3 : la somme des chiffres est un multiple de 3
- divisibilité par 4 : les deux derniers chiffres sont multiples de 4
- divisibilité par 5 : le chiffre des unités est 0 ou 5
- divisibilité par 9 : la somme des chiffres est un multiple de 9
- divisibilité par 10 : le chiffre des unités est 0

7. Les nombres premiers

Définition : Un nombre est premier s'il a 2 diviseurs 1 et lui-même.

Premiers nombres premiers : 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41

Crible d'Eratostène : Le crible d'Eratostène indique les nombres premiers inférieurs à 100

- on écrit la liste de tous les nombres jusqu'à 100
- on élimine 1, - on souligne 2 et on élimine tous les multiples de 2
- puis on fait de même avec 3, 5 et 7

Nombres premiers inférieurs à 100.

	2	3	5	7			
11		13		17		19	
		23				29	
31				37			
41		43		47			
		53				59	
61				67			
71		73				79	
		83				89	
				97			

Décomposition en facteurs premiers :

Tout nombre entier n peut s'écrire comme un produit de nombres premiers

8. Parité des nombres

Nombres pairs : - Les nombres pairs positifs sont définis par $n=2k$ $k \in \mathbb{N}$
- Le carré d'un nombre pair est un nombre pair et réciproquement

Nombres impairs : - Les nombres impairs positifs sont définis par $n=2k+1$ $k \in \mathbb{N}$
- Le carré d'un nombre impair est un nombre impair et réciproquement

Propriétés : - la somme de 2 nombres pairs est un nombre pair
- la somme de 2 nombres impairs est un nombre pair
- la somme d'un nombre pair et d'un nombre pair est un nombre impair

9. Fractions irréductibles

Une fraction est dite irréductible, lorsque le diviseur commun au numérateur et au dénominateur est 1.

Méthode : Pour écrire une fraction sous forme irréductible on décompose le numérateur et le dénominateur sous la forme d'un produit de nombres premiers et on simplifie.