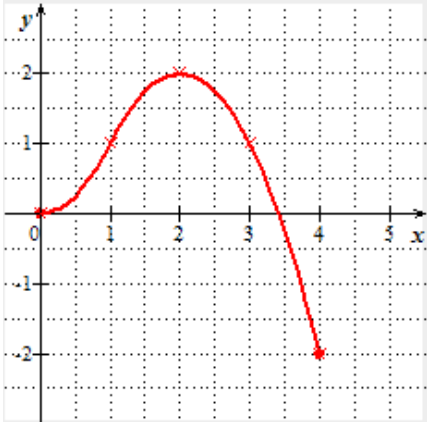
Continuité et convexité – Exercices – Devoirs

Exercice 1

La fonction donnée ci dessous représente une fonction définie sur [0 ;4].



1. a. Donner le tableau de variation de f.

b. La fonction f est-elle continue sur [0 ; 4] ?

2.a. Sur l'intervalle [2 ; 4], pour résoudre l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$, quel théorème peut-on appliquer et pourquoi ?

b. En appliquant ce théorème à l'intervalle [2 ; 4], montrer que l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$ admet une unique solution α.

c. Donner une valeur approchée de α.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{3x}+1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{2+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. f est-elle continue en 0 ? Justifier.

2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 3

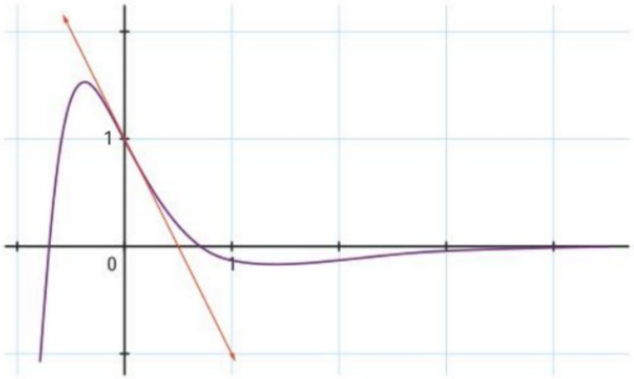
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2-1$.

1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier alors que $f(x)=2$ admet trois solutions sur $[-4\,;4]$.

Exercice 4

La courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

1. $f'(0)=-1$

2. $f'(1)=0$

3. $f''(1)<0$

4. $f'(x)>0$ sur $[2\,;3]$.

5. f est concave sur $[0;3]$
6. Si f est la fonction dérivée d'une fonction g, alors g est décroissante sur $[1;3]$
7. Si f est la fonction dérivée d'une fonction g, alors g est concave sur $[0;0,5]$

Exercice 5

Trouver la valeur de k telle que la fonction définie par $f : x \mapsto \begin{cases} x^2+e^{x-1} & \text{si } x \leqslant 1 \\ x+k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x + 12.$$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. Établir la convexité de la fonction f.

3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de C_f.

Exercice 7

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = (5-x^2)\sqrt{x}.$$

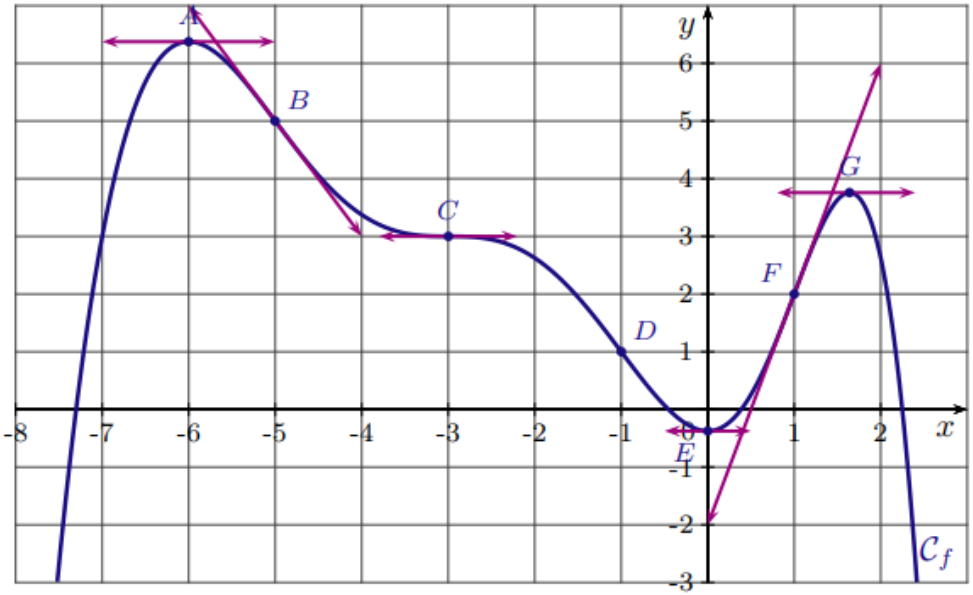
1. Déterminer la fonction dérivée g' et la fonction dérivée seconde g'' pour tout réel x strictement positif.

2. Étudier le signe de $g''(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

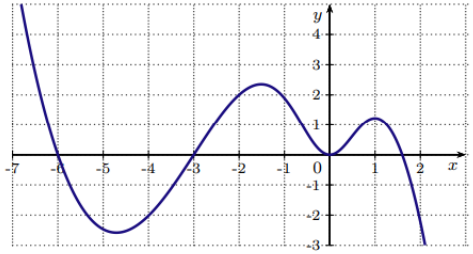
3. En déduire la convexité de g et les abscisses des éventuels points d'inflexion.

Exercice 8

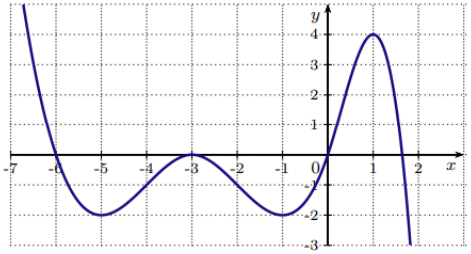
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative Cf d'une fonction f définie et dérivable sur R.



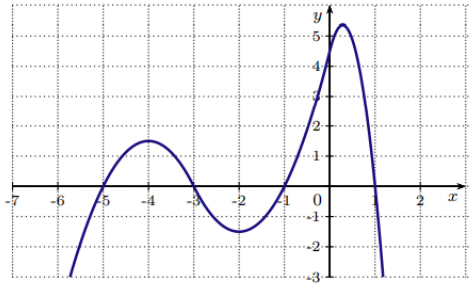
Une des quatre courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f ′ et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f ″ . Déterminer la courbe qui représente la dérivée f ′ et celle qui représente la dérivée seconde f ″ .



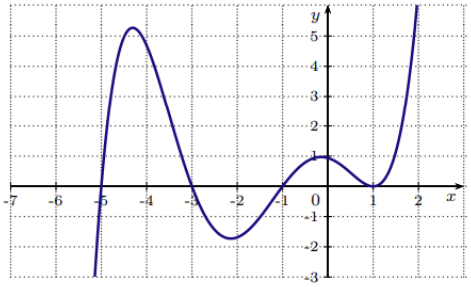
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$



Courbe $\mathcal{C}_4$

Exercice 9

Partie A

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [−3 ; 5].

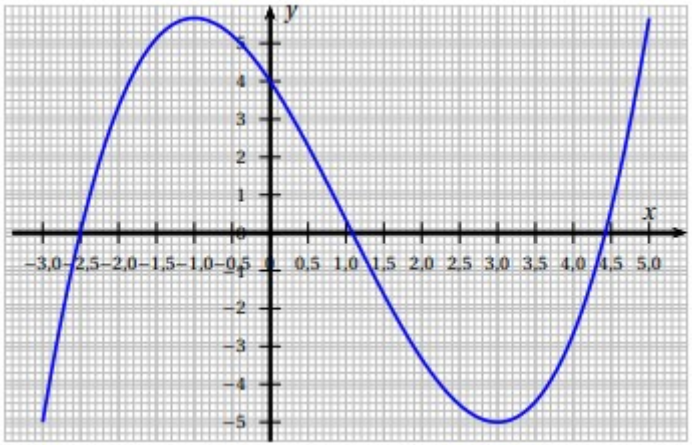
La courbe ci-contre est la courbe représentative de la fonction dérivée f ′ de f .

1. La fonction f est croissante sur l'intervalle :

   a. [1,5; 4] b. [-2; 0] c. [0; 2] d. [3; 4]

2. La fonction f est concave sur l'intervalle :

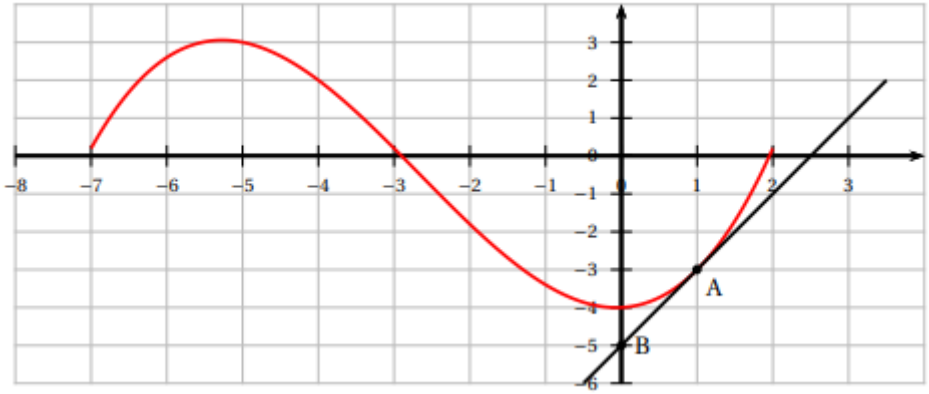
   a. [1,5; 4] b. [−2 ; 0] c. [0; 2] d. [3; 4]



Partie B

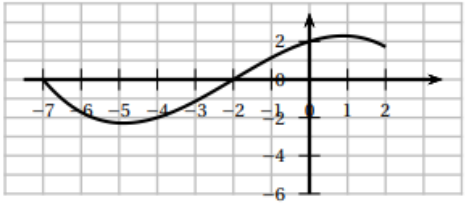
La courbe ci-dessous représente une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle [−7 ; 2].

La tangente au point A(1 ; −3) coupe l'axe des ordonnées au point B(0 ; −5)

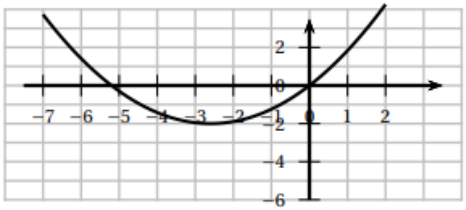


3. L'une des quatre courbes suivantes représente la fonction g ′ dérivée de la fonction g . Laquelle ?

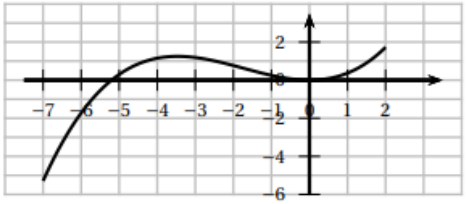
a.



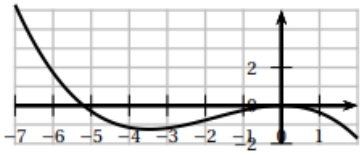
b.



c.



d.



4. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point A est :

a. y = −3x +1 b. y = x −5 c. y = 2x −5 d. y = x −4

Partie C

5. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des réels par $f(x)=5e^{-\frac{x}{3}}$. La dérivée f ′ de la fonction f vaut :

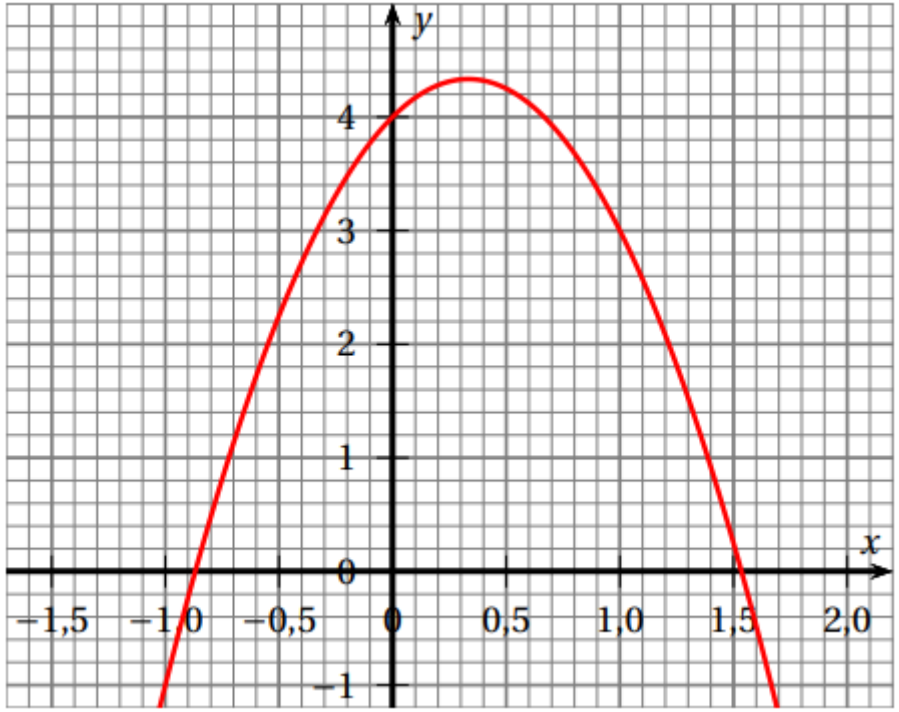
a. $f'(x)=\frac{-5x}{3}e^{-\frac{x}{3}}$ c. $f'(x)=-\frac{5}{3}e^{-\frac{x}{3}}$

b. $f'(x)=5e^{-\frac{x}{3}}$ d. $f'(x)=e^{-\frac{x}{3}}$

On considère la courbe ci-dessous représentative de la fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x)=-3x^2+2x+4$.

Dans l'algorithme ci-après, a et b sont deux réels. Quelle est la valeur de a en sortie de l'algorithme ?

a. 1,54 b. 1,48 c. −0,86 d. −0,87




```
a ← 0
b ← 4
Tant que b > 0
    a ← a + 0,01
    b ← −3a² + 2a + 4
Fin Tant que
```

Exercice 10

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2(x+2)\cdot e^{-x}$

Partie A

1. Calculer f (−1) et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
2. Justifier que $f'(x) = 2(x+1)e^{-x}$ où f ′ est la fonction dérivée de f .
3. En déduire les variations de la fonction f .

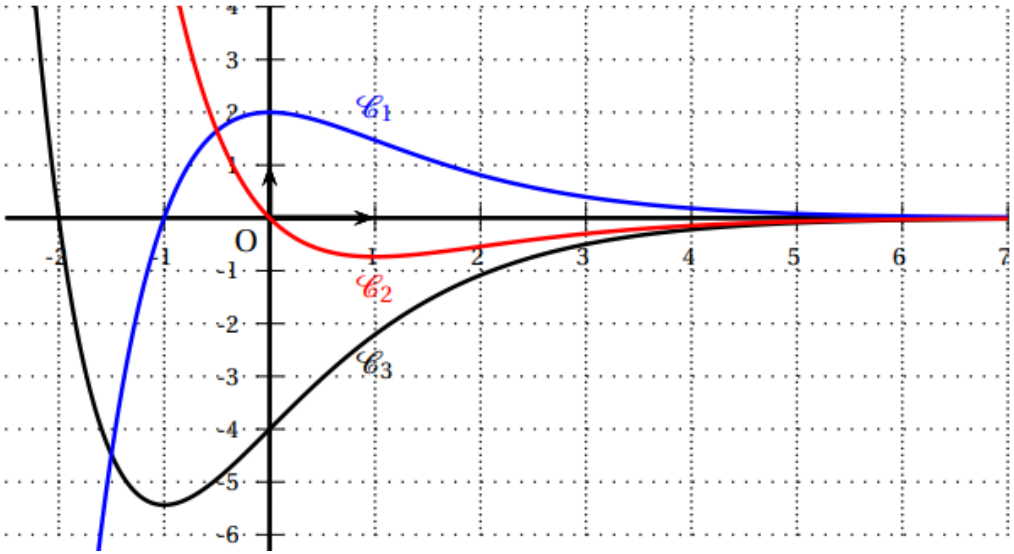
Partie B

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes C_1,C_2 et C_3 ont été représentées.

L'une de ces courbes représente la fonction f , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



Exercice 11

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle [−3 ; 1].

x	−3		−1		0		1
Variations de f	−6	↗	−1	↘	−2	↗	4

Proposition : L'équation f (x) = 0 admet une unique solution dans l'intervalle [−3 ; 1].

Exercice 12

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ par

$$f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x} + 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans une repère. Une représentation graphique est donnée en annexe.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$,

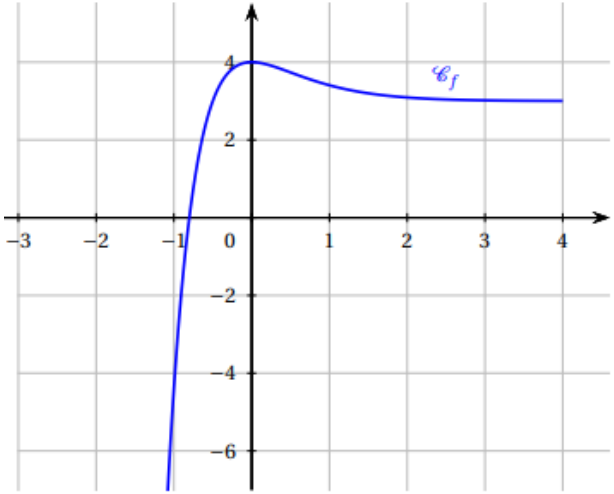
$$f'(x) = -4x\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-2\,;\,0]$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.
4. On note f'' la fonction dérivée de f'. On admet que, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$,

$$f''(x) = (8x-4)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

   a. Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.

   b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.



Exercice 13

f est la fonction définie sur $[0; 12]$ par

$$f(x) = 2xe^{-x}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver$(2 * x * \exp(-x))$
	$-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$
2	Factoriser$(-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x))$
	$2 * (1 - x) * \exp(-x)$
3	Dériver$(2 * (1 - x) * \exp(-x))$
	$2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$
4	Factoriser$(2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x))$
	$2 * (x - 2) * \exp(-x)$

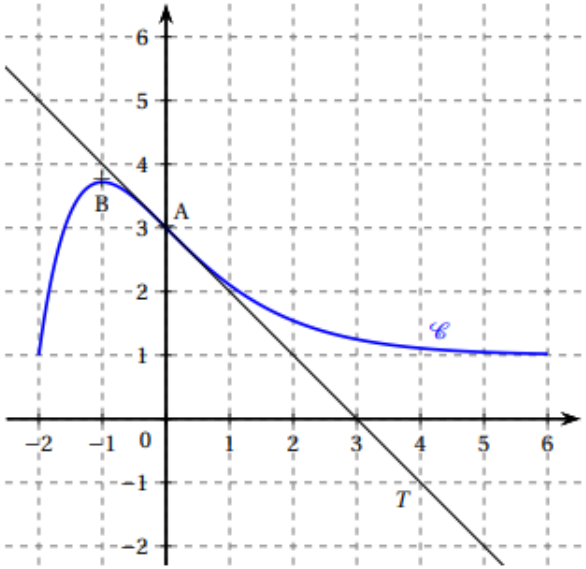
1. Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

2. **a.** Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12]$ en le justifiant.
   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet deux solutions dans $[0; 12]$.
   Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.
3. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12]$.

Exercice 14

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[-2 ; 6]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.
Le point A de coordonnées $(0 ; 3)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-2 ; 6]$.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point B d'abscisse -1.



En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer $f(0)$.
2. Déterminer $f'(0)$. En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
3. Déterminer le signe de f' sur $[-2 ; 6]$.
4. Donner la convexité de f sur $[-2 ; 6]$.