Intégration – Exercices – Devoirs

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^4 (t-3)\,dt$ **(b)** $\int_4^{-1} (t^2-4t)\,dt$ **(c)** $\int_1^2 \left(t^2-\frac{1}{t}\right)dt$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} (4e^t)\,dt$ **(b)** $\int_0^1 te^{t^2-1}\,dt$ **(c)** $\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+1}\,dt$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\right)dt$

2. $I=\int_0^1 e^{1-2x}\,dx$

3. $J=\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$

4. $M=\int_0^1 5^x\,dx$

5. $N=\int_0^{1/2} \frac{3x}{1-x^2}\,dx$

6. $O=\int_0^1 x(x^2+2)\,dx$

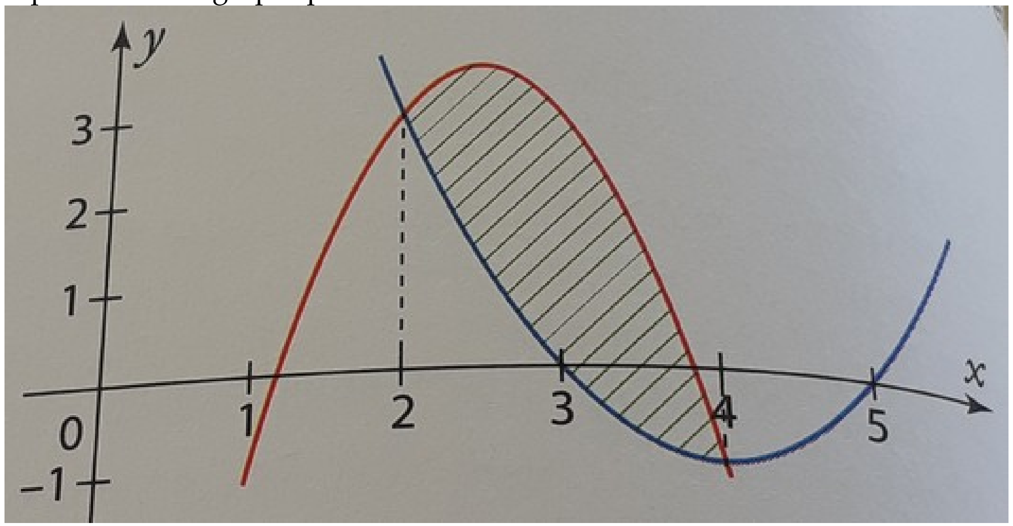
Exercice 4

1. $I=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$ **2.** $J=\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}\,dx$

3. $K=\int_{-1}^0 x^2 e^{x^3}\,dx$

Exercice 5

Soit $f(x)=x^2-8x+15$ et $g(x)=-2x^2+10x-9$ définies sur $\mathbb{R}$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous



1. Déterminer la position relative de C_f et C_g
2. Calculer l'aire du domaine hachuré

Exercice 6

Soient les fonctions g et h définies sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x}$ et $h(x)=\ln x+1$.

Soit C_g et C_h leurs courbes représentatives.

2. **(a)** Représenter C_g et C_h. Quelles sont les coordonnées de I, intersection de C_h avec l'axe des abscisses ?

(b) On note A l'aire du domaine délimité par C_g et C_h et les droites d'équation $x=e^{-1}$ et $x=1$. Déterminer A.

Exercice 7

1. Résoudre l'inéquation $\ln t - 1 \leq 2\ln 3$.
2. (a) Soit f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = x(1 - \ln x)$.
   Calculer $f'(x)$ pour tout x >0.

   (b) En déduire $\int_1^e \ln x dx$.
3. Montrer que l'on a $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1} dt = \ln\sqrt{\frac{e^2+1}{2}}$

Exercice 8

1. $I = \int_1^3 (x^3 + 4x^2 - 5x + 1)\mathrm{d}x$

2. $J = \int_1^3 \frac{2}{x}\mathrm{d}x$ **3.** $K = \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

Exercice 9

1. $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ **2.** $J = \int_4^9 x + \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

3. $K = \int_0^{\ln 2} (2x + \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$

Exercice 10

1. $I = \int_1^2 \frac{x^2+3}{x}\mathrm{d}x$ **2.** $J = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

3. $K = \int_1^{\ln 2} \mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x$

Exercice 11

1. $I = \int_{-2}^2 (x+1)\mathrm{d}x$ **2.** $J = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x$

3. $K = \int_0^4 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

Exercice 12

1. $I = \int_{-1}^1 (2x+1)(x^2+x)^2\,\mathrm{d}x$

2. $J = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x$

3. $K = \int_0^1 (3x^2-5)(x^3-5x+1)^3\,\mathrm{d}x$

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4$.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé du plan.

3. Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

4. Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Exercice 15

Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle I

1. $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ $\quad$ $I = [0\,;1]$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ $\quad$ $I = [1\,;\mathrm{e}]$
3. $f(x) = \mathrm{e}^{2-x}$ $\quad$ $I = [0\,;4]$

Exercice 16

Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle I

1. $f(x) = (2-x)(x-1)$ $\quad$ $I = [-1\,;0]$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$ $\quad$ $I = [0\,;1]$

Exercice 17

On étudie l'évolution du taux de natalité d'une population entre 1750 et 1870.

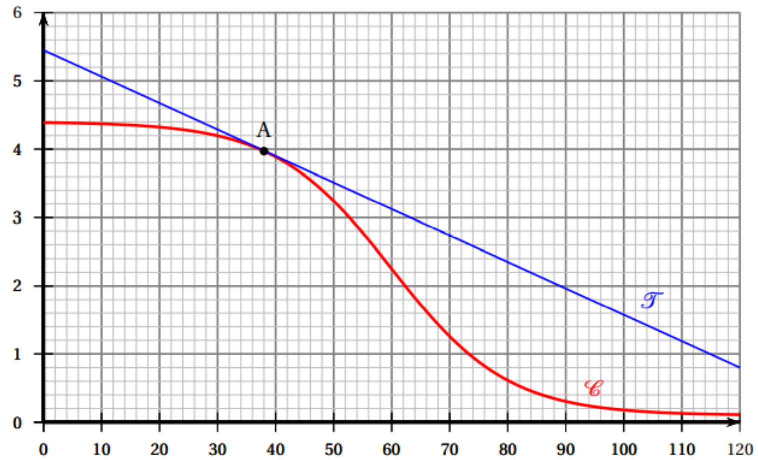
On admet que le taux de natalité peut être modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 120]$ par :

$$f(x) = 0{,}1 + \frac{4{,}3}{1+\mathrm{e}^{0{,}1x-6}}$$

où :

- x représente le temps, exprimé en années, écoulé depuis 1750,
- $f(x)$ représente le taux de natalité, exprimé en pourcentage, de la population totale. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; 120]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représente la fonction f, et la droite $\mathscr{T}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 38.



Partie A

1. Avec la précision permise par le graphique :
   a. Donner une valeur approchée de $f'(38)$.
   b. Recopier, parmi les propositions suivantes, celle qui est exacte :

$$7 \leqslant \int_{10}^{30} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 8 \quad ; \quad 130 \leqslant \int_{30}^{120} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 190 \quad ; \quad 700 \leqslant \int_{80}^{100} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 800.$$

Partie B

1. On admet que sur l'intervalle $[0; 120]$, la fonction g d'expression $g(x) = \dfrac{4{,}3}{\left(1+\mathrm{e}^{0{,}1x-6}\right)}$ a pour primitive la fonction G d'expression $G(x) = -43\ln\left(1+\mathrm{e}^{-0{,}1x+6}\right)$.
   a. Donner une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0; 120]$.
   b. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_{30}^{120} f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer le taux de natalité moyen entre 1780 et 1870. On en donnera une valeur approchée à 0,01 % près.

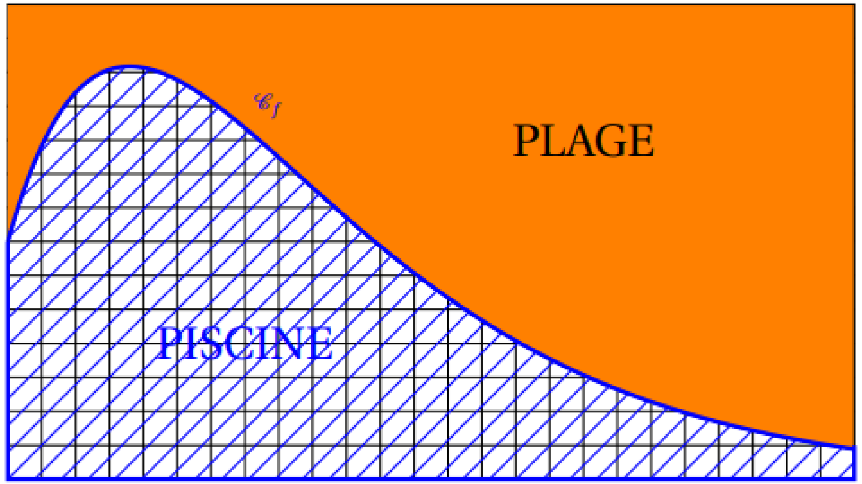
Exercice 18

Un organisme de vacances souhaite ouvrir un nouveau centre avec une piscine bordée de sable. Il dispose d'un espace rectangulaire de 25 mètres de longueur sur 14 mètres de largeur et souhaite que la piscine et la « plage »se partagent l'espace comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
La bordure est modélisée par la fonction f

$$f(x)=(5x+7)e^{-0,2x} \quad \text{pour} \quad x\in[0;25]$$

1. Démontrer que la fonction $F(x)=-(25x+160)e^{-0,2x}$ est une primitive de f(x) pour $x\in[0;25]$
2. Quelle est l'aire en m^2 de la zone hachurée représentant la piscine?

   L'organisme décide de remplacer cette piscine par une piscine rectangulaire de 25 mètres de longueur et de même superficie.
3. Quelle en sera la largeur arrondie au dixième de mètre?

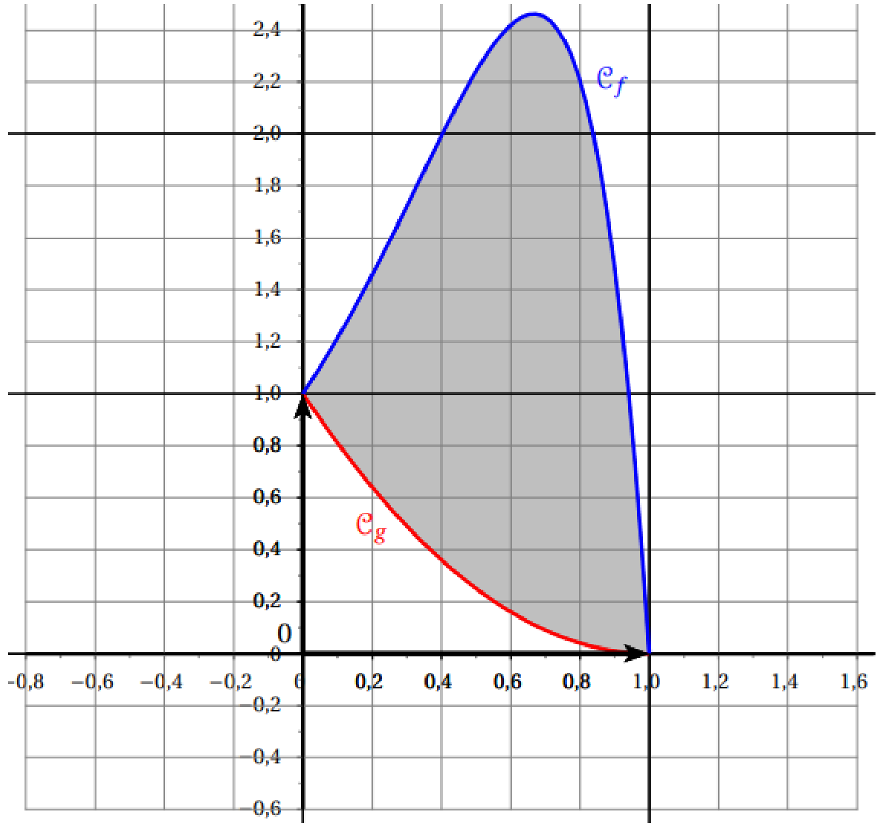


Exercice 19

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies par : pour tout réel x de $[0\,;\,1]$,

$$f(x)=(1-x)e^{3x} \quad \text{et} \quad g(x)=x^2-2x+1.$$

Leurs courbes représentatives seront notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1\,;\,0)$ et $(0\,;\,1)$ sont des points communs aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Vérifier que : pour tout x dans $[0;\,1]$, $f(x)-g(x)=(1-x)\left(e^{3x}-1+x\right)$.
3. **a.** Justifier que pour tout x dans $[0;\,1]$, $e^{3x}-1\geqslant 0$.

   b. En déduire que pour tout x dans $[0;\,1]$, $e^{3x}-1+x\geqslant 0$.

   c. Étudier le signe de $f(x)-g(x)$ pour tout x dans $[0;\,1]$.
4. **a.** Calculer $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

   b. On admet que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{e^3-4}{9}.$$

Calculer l'aire S, en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.

Exercice 20

La courbe représentative d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[0\,;2]$ est donnée en fig. 1.

La courbe représentative d'une de ses primitives, G, est donnée sur la fig. 2. La courbe représentative de G passe par les points $A(0;\,1)$, $B(1\,;1)$ et $C(2\,;5)$.

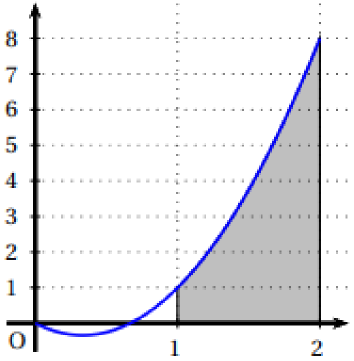


fig. 1

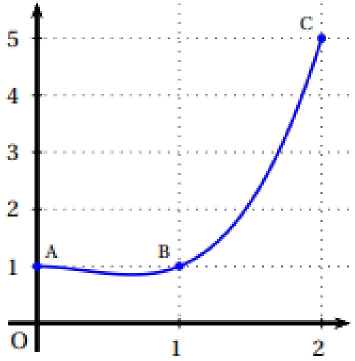


fig. 2

Proposition : la valeur exacte de l'aire de la partie grisée sous la courbe de g en fig. 1 est 4 unités d'aires.

Exercice 21

On considère la fonction f définie sur $[0{,}5\,;10]$ par :

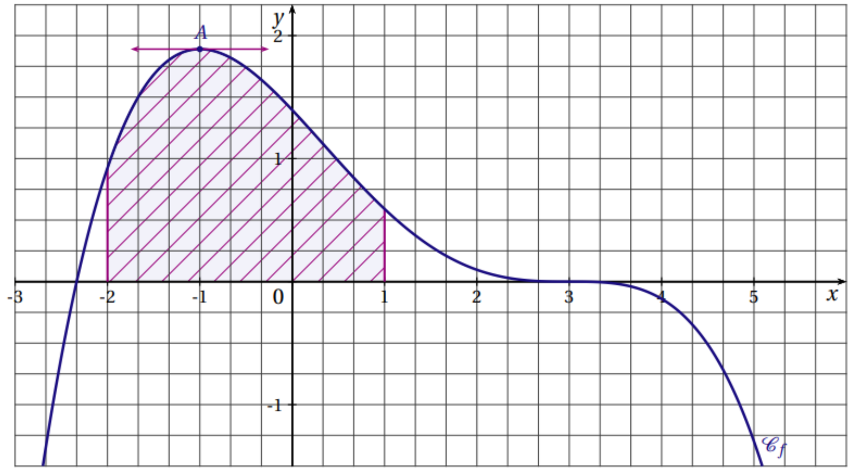
$$f(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x).$$

1. Calculer $I = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.

2. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;3]$: en donner une valeur approchée au millième.

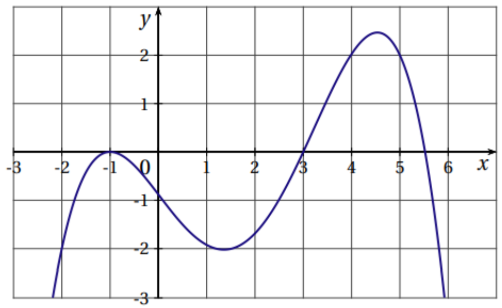
Exercice 22

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f et F une primitive de la fonction f.

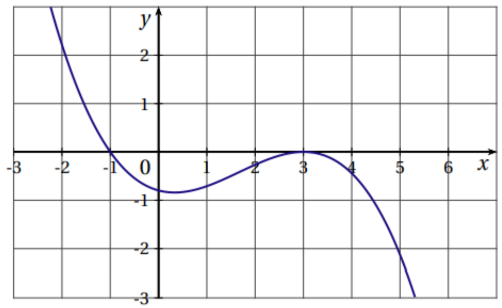


1. Déterminer graphiquement une valeur approchée à l'unité de l'intégrale $\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Une des quatre courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et une autre celle de la fonction F.

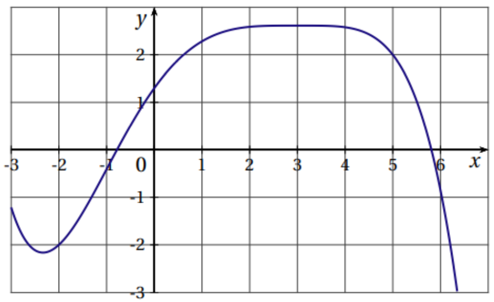
COURBE C_1



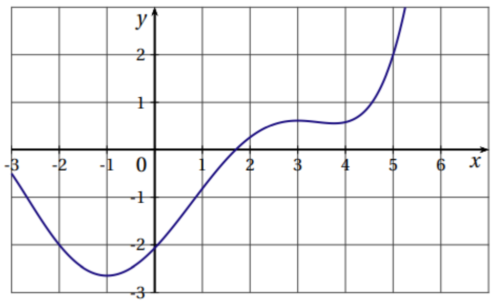
COURBE C_2



COURBE C_3



COURBE C_4



a) Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F. (*Justifier*)

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) La courbe représentative de la fonction F admet-elle des points d'inflexion ?

Exercice 23

Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 3x + 1\right)\,\mathrm{d}x$.
2. $B = \int_{0}^{2\ln 2} \left(x + \mathrm{e}^{0,5x}\right)\,\mathrm{d}x$.
3. $C = \int_{1}^{\mathrm{e}} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 24

Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \int_{-2}^{1} \left(2x^2 - 5x - 3\right)\mathrm{d}x$.
2. $B = \int_{2}^{4} \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

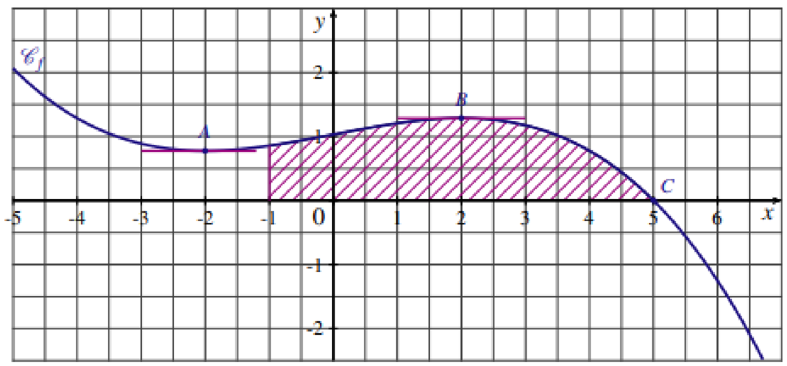
Exercice 25

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = (1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$.

1. Montrer que la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

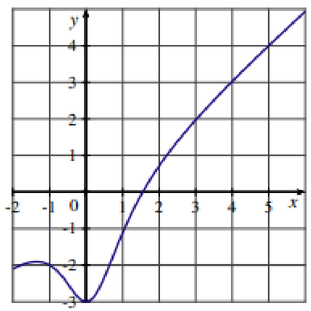
Exercice 26

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

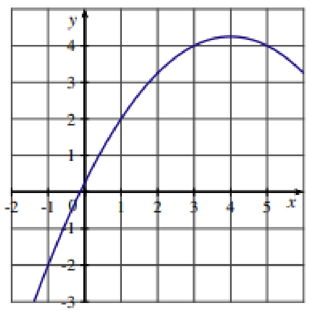


On note F une primitive de la fonction fonction f.

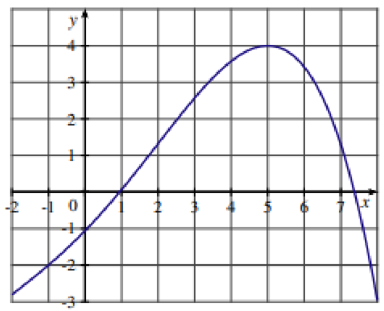
1. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la primitive F.
   Déterminer la courbe associée à la fonction F.



Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3

2. Donner une valeur approchée (en unité d'aire) de l'aire du domaine hachuré.

Exercice 27

Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_{e^{-1}}^{1} 2x - \frac{1}{x}\mathrm{d}x$; $B = \int_{1}^{2} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.