Lois à densité – Exercices – Devoirs

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction *f* est une densité pour une loi de probabilité sur *I* :

1. $f(x)=2-x \quad I=[0;3]$
2. $f(t)=\frac{1}{3} \quad I=[2;5]$
3. $f(t)=3t^2 \quad I=[0;1]$
4. $f(t)=\frac{t^3}{4} \quad I=[0;1]$

Exercice 2

On considère la fonction *f* définie sur [0 ;1] par : $f(x)=3x^2$

1. Justifier que *f* est une densité de probabilité.

2. X est une variable aléatoire de loi de densité *f*.

Calculer les probabilités suivantes :

(a) $P(X\geq 0{,}5)$ **(b)** $P(X<0{,}1)$ **(c)** $P(0{,}2<X<0{,}8)$

Exercice 3

On considère l'intervalle *I* = [1 ;5] et la fonction *f* définie sur *I* par

$$f(t)=\frac{k}{t^2}$$

1. Déterminer la valeur du réel *k* pour que *f* soit une densité de probabilité sur I.

2. Calculer $P([1;2])$ et $P_{[2;4]}([3;5])$

Exercice 4

On considère l'intervalle *I* = [1 ;3] et la fonction *f* définie sur *I* par

$$f(t)=\frac{9}{4}t^{-3}$$

1. Vérifier que *f* est une densité pour une loi de probabilité sur *I*.

2. Une variable aléatoire *X* suit une loi de probabilité de densité *f*.

Calculer $P(X<2)$.

3. On définit l'espérance mathématique de *X* par

$$E(X)=\int_1^3 t.f(t)dt$$

Déterminer l'espérance de X.

Exercice 5

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [-2 ; 3] :

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité.
2. Calculer : $P([1\ ;\ 2])$.
3. Déterminer $P_{[1\ ;\ 2{,}5]}([2\ ;\ 3])$.
4. Calculer l'espérance E(X).

Exercice 6

On choisit un nombre au hasard dans [-3 ; 7].

X est la variable aléatoire qui indique le nombre réel choisi.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :

(a) X<0

(b) $|(X)|<5$

(c) X=4

(d) X<0 et X>1

(e) X >= 0 ou X <= - 1

(f) X >= 2 sachant que X <= 5

2. Déterminer l'espérance E(X).

Exercice 7

Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle [1 ; 11].

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité de la loi de X.
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?
3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse ?
4. Préciser le temps d'attente moyen à la caisse.

Exercice 8

Le temps, mesuré en heures, nécessaire pour réparer une certaine machine suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=\frac{1}{2}$.

1. Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède deux heures ?

2. Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins dix heures, étant donné que sa durée dépasse huit heures ?

Exercice 9

Partie A – Restitution Organisée de Connaissances

On suppose connu le résultat suivant : « Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ alors, pour t réel positif :

$$P(X\leq t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$$

a. Démontrer l'égalité $P(X\geq t)=e^{-\lambda t}$.

b. En déduire pour s et t réels positifs, l'égalité suivante : $P_{X>t}(X\geq s+t)=P(X\geq s)$.

Partie B

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ .

1. a. Déterminer une expression exacte de λ sachant que $P(T\leq 10)=0{,}7$.

On prendra pour la suite de l'exercice, la valeur 0,12 comme valeur approchée de λ .

b. Donner une expression exacte de la probabilité $P_{T>10}(T>15)$.

c. Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes. On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à 0,01 près de la réponse.

Exercice 10

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que, pour tout réel $t \geq 0$, $P(X\leq t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6.

Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131.

Dans les questions suivantes, on supposera que l'on a $\lambda = 0{,}131$; les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.

3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

Exercice 11

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0{,}2\ \text{min}^{-1}$.
   a. Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.
   b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.

Exercice 12

1. Une boîte d'un certain médicament permet de soigner un malade.
   La durée d'efficacité (exprimée en mois) de ce médicament est modélisée de la manière suivante :
   - durant les 12 premiers mois après fabrication, on est certain qu'il demeure efficace;
   - au-delà, sa durée d'efficacité restante suit une loi exponentielle de paramètre λ.

   La probabilité que l'une des boîtes prise au hasard dans un stock ait une durée d'efficacité totale supérieure à 18 mois est égale à $0{,}887$.
   Quelle est la valeur moyenne de la durée d'efficacité totale de ce médicament?
2. Une ville de 100 000 habitants veut constituer un stock de ces boîtes afin de soigner les personnes malades.
   Quelle doit être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité qu'il suffise à soigner tous les malades de cette ville soit supérieure à 95 % ?

Exercice 13

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \frac{1}{8}$.
La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,250 **c.** 0,472 **d.** 0,528

Exercice 14

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.
   On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$.
   Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.
   a. Déterminer la valeur de λ.
   b. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table? On arrondira à 10^{-4}.
   c. Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table? On arrondira à 10^{-4}.