Lois à densité – Fiche de cours

1. Généralités des lois de densité

a. Variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers I ∈ ℝ
X est dite variable aléatoire continue (ou réelle).

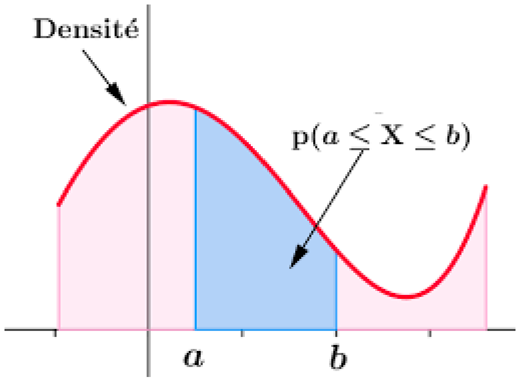
b. Densité de probabilité

On appelle densité de probabilité une fonction f telle que :
- f est définie sur I ∈ ℝ et $f>0$
- f est continue sur I sauf en quelques points
- $\int f(t)\,dt=1$

c. Probabilité d'un événement

Soit X une variable aléatoire de densité f
La probabilité d'une loi à densité sur $[a\,;b]$ est défini par :

$$P(a\leq X\leq b)=\int_a^b f(t)\,dt$$



d. Espérance mathématique

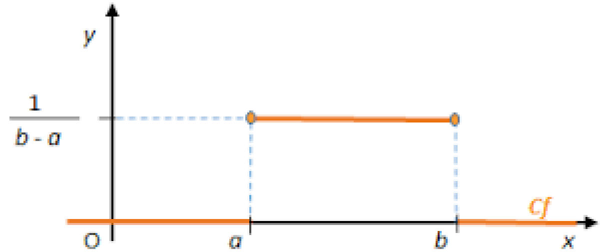
Soit X une variable aléatoire de densité f
L'espérance mathématique de X est définie par :

$$E(X)=\int x\cdot f(x)\,dx$$

2. Loi uniforme

a. Définition

La loi uniforme sur [a ; b] est la loi de probabilité dont la densité est la fonction f définie par :



$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a;b] \\ f(x)=0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b. Espérance mathématique

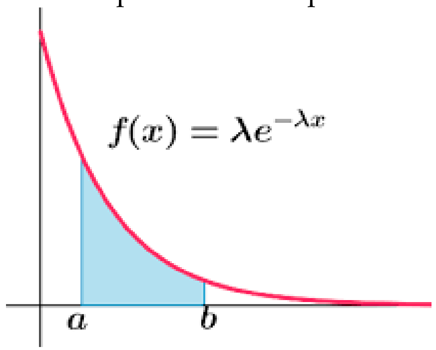
L'espérance mathématique de la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$ est définie par :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

3. Loi exponentielle

a. Définition

La loi exponentielle de paramètre λ est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :



$$\begin{cases} f(x)=\lambda e^{-\lambda\cdot x} & \text{si } x\in[0\,;+\infty[\\ f(x)=0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b. Probabilités

$P(x \leq c) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$ $\quad$ $P(x \geq c) = e^{-\lambda \cdot x}$ $\quad$ $P(a \leq x \leq b) = e^{-\lambda \cdot a} - e^{-\lambda \cdot b}$

c. Loi de durée sans vieillissement

$P_{X \geq t}(x \geq t + s) = P(x \geq s)$

d. Espérance mathématique

L'espérance mathématiques d'une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ vaut :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$