

Lois de probabilités discrètes – Fiche de cours

1. Loi uniforme discrète

a. Définition

La variable aléatoire X sur une loi uniforme discrète sur $[[a; b]]$ si :

- X prend toutes les valeurs entières de $[[a; b]]$

$$- p(X=a) = P(X=a+1) = \frac{1}{a-b+1}$$

b. Espérance

Si X est une variable aléatoire uniforme sur $[[a; b]]$ alors :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

2. Epreuves et lois de Bernoulli

a. Définition

Une épreuve aléatoire ayant uniquement 2 issues possibles est appelée épreuve de Bernoulli

Si X suite une loi de Bernoulli alors :

$$- P(X=0) = 1-p$$

$$- P(X=1) = p$$

b. Espérance, écart type

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli

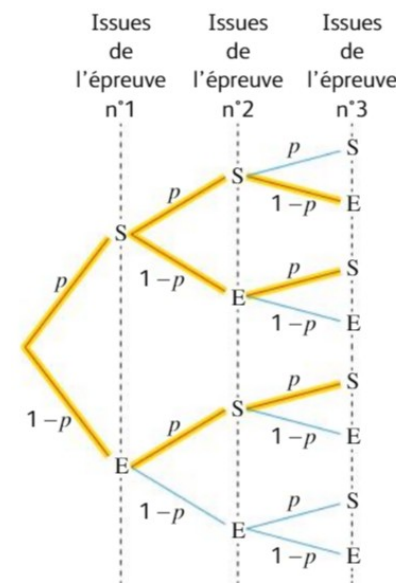
$$- E(X) = p$$

$$- V(X) = p(1-p) \text{ et } \sigma_X = \sqrt{p(1-p)}$$

3. Schéma de Bernoulli

a. Représentation par un arbre

Un schéma de Bernoulli à n épreuves est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes



b. Coefficients binomiaux

On considère un schéma de Bernoulli à n épreuves

Le nombre de manière d'obtenir k succès parmi n tirages, sans tenir compte de l'ordre, s'appelle coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = C_n^k$$

c. Triangle de Pascal

- Propriété des coefficients binomiaux

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$$

$$\binom{0}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n \quad ; \quad \binom{n}{n-1} = n \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Relation de Pascal

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- Triangle de Pascal

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

4. Loi binomiale

a. Loi du nombre de succès

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètre p à n épreuves

X suit une loi binomiale $B(n; p)$ avec

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

b. Espérance, écart type

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n; p)$

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$

c. Représentation graphique

Loi binomiale, n=10, p=0.5

