Statistiques à 2 variables – Exercices

Exercice 1 **corrigé disponible**

Evolution de l'indice IMVP

L'indice IMVP (International Motor Vehicule Program) est un indicateur de référence élaboré par le Massachussets Institute of Technology qui mesure, en heures, le temps de montage moyen d'un véhicule.

Dans une entreprise de construction automobile, on a obtenu le tableau suivant :

Année	Rang de l'année xi	Temps en heures yi
1995	5	26,2
1996	6	23,7
1997	7	21,4
1998	8	18,5
1999	9	16,8
2000	10	15,4
2001	11	14,6

PARTIE A

1. Représenter le nuage de points M_i associé à la série statistique (x_i, y_i) dans un plan rapporté à un repère orthonormal
2. Calculer les coordonnées du point moyen et le placer sur le graphique.
3. Déterminer var(X), var(Y) cov(X,Y) ; en déduire la valeur du coefficient de corrélation ; un ajustement affine semble-t-il justifié ? Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthodes des moindres carrés.
4. En déduire par le calcul, les prévisions du temps de montage moyen pour l'année 2005, puis l'année 2007, en supposant que le modèle reste valable jusqu'en 2007.

PARTIE B

On décide d'approcher ce nuage par un arc de parabole ; pour cela on pose $z=\sqrt{y}$.

1. On suppose qu'un ajustement affine de z en x est justifié.
   Donner le tableau des valeurs (x_i, z_i). Les valeurs z_i seront arrondies au centième.
2. Calculer les coordonnées du point moyen et le placer sur le graphique.
3. Déterminer var(Z) cov(X,Z) ; en déduire la valeur du coefficient de corrélation ; un ajustement affine semble-t-il justifié ? Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de z en x, obtenue par la méthodes des moindres carrés.
4. En déduire l'expression de y en fonction de x, puis les temps de montage en 2005 et en 2007 arrondis au dixième.

Exercice 2

Sur un parcours donné, la consommation y d'une voiture est donnée en fonction de sa vitesse moyenne x par le tableau suivant :

x (en km/heure)	80	90	100	110	120
y (en litres/100 km)	4	4,8	6,3	8	10

1. La consommation est-elle proportionnelle à la vitesse moyenne ? Justifier la réponse
2. a. Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (on prendra 2 cm pour 10 km/h sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 litre sur l'axe des ordonnées).
   b. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
   c. A l'aide de la calculatrice, donner une équation, sous la forme $y = ax+b$, de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés et tracer cette droite (on arrondira a au millième et b au centième).

d. En utilisant cet ajustement, estimer la consommation aux 100 km (arrondie au dixième) de la voiture pour une vitesse de 130 km/h.

3. La forme du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose : $z = \ln y$ et on admet que la droite d'ajustement obtenue pour les cinq points $(x\ ;\ z)$ du nuage par la méthode des moindres carrés, a pour équation $z = 0{,}0234x - 0{,}5080$.

a. Écrire y sous la forme $y = Ae^{Bx}$ (donner A et Barrondis à 10^{-4}).

b. Tracer, sur le même graphique, la courbe d'équation $y = Ae^{Bx}$ pour x élément de l'intervalle $[80\,;\,120]$.

c. En utilisant cet ajustement, estimer la consommation aux 100 km (arrondie au dixième) de la voiture, pour une vitesse de 130 km/h.

4. Des deux valeurs obtenues dans les questions **2. d.** et **3. c.**, pour la consommation à une vitesse de 130 km/h, laquelle vous semble la plus proche de la consommation réelle? Expliquer votre choix.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

Une étude statistique effectuée sur un produit a donné les résultats suivants où :

x désigne le prix unitaire en euros,
y désigne la demande en milliers d'unités,
z désigne l'offre en milliers d'unités.

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5	7	8,5
y	8,4	5,3	3,9	3,1	2,8	2,1	1,7
z	0,75	1,25	1,75	2,25	2,5	3,5	4,25

1. a. Vérifier que la quantité offerte z est proportionnelle au prix unitaire x.

b. On appelle g la fonction offre ainsi définie sur [1 ; 10] par z = g(x). Représenter g dans le repère orthonormal R (unité graphique : 1cm).

2. a. Représenter, dans le repère R, le nuage associé à la série statistique (x ;y).

b. Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer D dans le repère R.

c. A l'aide de cet ajustement, calculer le prix unitaire d'équilibre (c'est-à-dire celui pour lequel l'offre est égale à la demande). Vérifier graphiquement.

3. On se propose de déterminer un autre type d'ajustement pour cette série.

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

X=lnx	0,41		1,25				
Y=lny	2,13						

b. On admet qu'il est justifié de considérer un ajustement affine de Y en X.

Donner une équation de la droite d'ajustement affine de Y en X.

c. En déduire que l'on a $y = e^{-0{,}92\ln x + 2{,}51}$ et rechercher graphiquement le prix unitaire d'équilibre obtenu avec ce nouvel ajustement.

Exercice 4

Dans cet exercice, les calculs peuvent être effectués à la calculatrice ; leur détail n'est pas exigé.

Le tableau ci-dessous nous donne la charge maximale y_i, en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur x_i, en mètres, de la flèche.

Longueur x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	35	39	41,7
Charge y_i	10	9	8	7	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

1. Les réponses numériques à cette question seront données à 10^{-2} près.
   a) Représenter le nuage de points $M(x_i\,;\,y_i)$ à l'aide d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 1 cm pour 2 mètres en abscisses et 1 cm pour une tonne en ordonnées.
   b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
   Construire cette droite sur le graphique précédent.
   c) Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever une grue avec une flèche de 26 mètres.

2. On pose $z_i = \dfrac{1}{y_i}$

a) Recopier et compléter le tableau suivant (les z_i seront arrondis à 10^{-3} près)

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	35	39	41,7
y_i	0,100									

b) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés. (les résultats numériques seront arrondis à 10^{-4} près)

c) En se fondant sur les résultats obtenus en 2.b), calculer la valeur de z correspondant à $x = 26$.
En déduire la charge maximale que peut lever une grue avec une flèche de 26 mètres.

d) Ce résultat vous paraît-il plus satisfaisant que celui de 1.d) ? Pourquoi ?