Matrices et graphes – Fiche de cours

1. Notion de matrice

a. Définition

Un matrice de dimension $n\,x\,p$ est un tableau de n lignes et p colonnes de nombres réels ou complexes

Exemple : $A=\begin{pmatrix}1 & e & \pi\\ 1 & e^2 & \pi^2\end{pmatrix}$ matrice de dimension $2\,x\,3$

b. Vocabulaire

- si n=1 alors la matrice est un vecteur ligne

  Exemple : $A=\begin{pmatrix}1 & e & \pi\end{pmatrix}$

- si p=1 alors la matrice est un vecteur colonne

  Exemple : $A=\begin{pmatrix}1\\ e\\ \pi\end{pmatrix}$

- si n=p alors la matrice est carrée

  Exemple : $A=\begin{pmatrix}1 & e & \pi\\ 1 & e^2 & \pi^2\\ 1 & e^3 & \pi^3\end{pmatrix}$

- une matrice carrée est diagonale lorsque tous les termes sont nuls saufs ceux de la diagonale

  Exemple : $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^2 & 0\\ 0 & 0 & \pi^3\end{pmatrix}$

- une matrice I_n est identité lorsque tous les termes sont nuls saufs ceux de la diagonale qui valent 1

  Exemple : $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

- une matrice O_n est nulle lorsque tous ses coefficients sont égaux à 0

  Exemple : $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

- deux matrices sont égales lorsque tous leurs coefficients sont égaux 2 à deux
- une matrice carré de dimension n est symétrique lorsque :

$$A=(a_{i,j}) \qquad a_{i,j}=a_{j,i}$$

  Exemple : $A=\begin{pmatrix}1 & e & \pi\\ e & e^2 & \pi^2\\ \pi & \pi^2 & e^3\end{pmatrix}$

c. Opération sur les matrices

- somme de matrices

  La somme de 2 matrices de même dimension est :

$$A(a_{i,j})+B(b_{i,j})=C(c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j})$$

  La somme de 2 matrices est associative et commutative

$$A+(B+C)=(A+B)+C \quad ; \quad A+B=B+A$$

- multiplication par un réel

  Pour multiplier une matrice par un réel, il convient de multiplier tous les coefficient de la matrice avec ce réel

$$A=(a_{i,j}) \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R} \quad \lambda A=(\lambda\, a_{i,j})$$

- multiplication d'un vecteur ligne avec un vecteur colonne

$$L\begin{pmatrix}l_{1,1} & l_{1,2} & \dots & l_{1,n}\end{pmatrix}\times C\begin{pmatrix}c_{1,1}\\ c_{2,1}\\ \dots\\ c_{n,1}\end{pmatrix}=l_{1,1}c_{1,1}+l_{1,2}c_{2,1}+\dots+l_{1,n}c_{n,1}$$

- multiplication de 2 matrices

Les coefficients $c_{i,j}$ de la matrice produit $A\times B$ sont égaux au produit de la i^ème^ ligne de A avec la j^ième^ colonne de B

$$A\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \dots & .. & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}\times B\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,p} \\ \dots & .. & \dots & \dots \\ b_{q,1} & b_{q,2} & \dots & b_{q,p} \end{pmatrix}=A\times B\left(c_{i,j}=\sum a_{i,k}b_{k,j}\right)$$

- propriétés

$$A\times B\times C=(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$$
$$A\times(B+C)=A\times B+A\times C$$
$$I_n\times A=A\times I_n=A$$

- puissance de matrice

La puissance k^ième^ d'une matrice carrée de dimension n est :

$$A^k=A\times A\times\ldots\times A \quad (k\,fois)$$

d. Inverse de matrice

- définition

Une matrice carrée A de dimension n est inversible lorsqu'il existe une matrice B telle que :

$$A\times B=B\times A=I_n \quad \text{avec} \quad B=A^{-1}$$

- matrice carrée de dimension 2

$A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; on appelle $det(A)=ad-bc$; si $det(A)\neq 0$

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

e. Résolution de systèmes

Pour le système matriciel $A\times X=B$

avec $A\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}\times B\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}=X\begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ \dots \\ x_{n,1} \end{pmatrix}$

Si A est inversible alors $X=A^{-1}\times B$

f. Transformation du plan

Soit un vecteur $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan et son image $\overrightarrow{OM}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ par une transformation du plan

Soit M la matrice des points objets et M' la matrice des points images dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

- translation de vecteur $\vec{t}(a;b)$

$$T=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad M'=T+M$$

- symétrie par rapport à l'axe des abscisses

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad M'=T\cdot M$$

- symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

$$T=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad M'=T\cdot M$$

- rotation d'angle θ par rapport à l'origine

$$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad M'=T\cdot M$$

- homothétie de rapport k par rapport à l'origine

$$T=\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad M'=T\cdot M$$

- rotation d'angle θ par rapport à un point Ω (invariant)

$$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad M'=T\cdot(M-\Omega)+\Omega$$

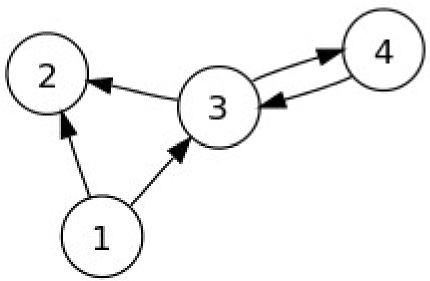
- homothétie de rapport k par rapport à un point Ω (invariant)

$$T=\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad M'=T\cdot(M-\Omega)+\Omega$$

2. Les graphes

a. Définition et vocabulaire

exemple :



Un graphe est une représentation composée de sommets (points) et d'arêtes (segments)
Un graphe est orienté lorsque les arrêtes ont un sens de parcours

L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes

Deux sommets sont adjacents lorsqu'ils sont reliés par au moins une arête
Un graphe est complet lorsque tous ses sommets sont adjacents 2 à 2

Pour un graphe non orienté une chaîne est une suite d'arêtes consécutives reliant 2 sommets

Pour un graphe orienté un chemin est une suite d'arêtes consécutives reliant 2 sommets en tenant compte du sens de parcours

La longueur d'une chaîne ou d'un chemin est le nombre d'arête la/le composant

Un graphe non orienté est connexe lorsque chaque couple de sommets peut être relié par une chaîne

Un graphe est complet si chaque sommet est relié à un autre

Un graphe est eulérien s'il existe une chaîne passant par toutes les arêtes une seule fois

b. Matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence d'un graphe indique le nombre de chaînes / chemins de longueur 1 pour relier un sommet à un autre

exemple (matrice d'adjacence du graphe orienté précédent):

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Le coefficient de la i$^{\text{ème}}$ ligne et j$^{\text{ième}}$ colonne de M^k donne le nombre de chemins de longueur k pour relier le sommet i vers le sommet j

3. Suites de matrices

a. Etude de suites de la forme $U_{n+1}=A\,U_n$ ou $U_{n+1}=U_n\,A$

Une suite de matrice (U_n) est une fonction qui associe à toute matrice une matrice de même dimension

Exemple : $U_2=\begin{pmatrix}4 & 10\end{pmatrix}$ $U_3=\begin{pmatrix}5 & 11\end{pmatrix}$

Soit (U_n) une suite de matrice colonne et A une matrice carrée définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1}=A\cdot U_n \\ U_0 \end{cases} \Leftrightarrow U_n=U_0A^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Soit (U_n) une suite de matrice ligne et A une matrice carrée définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1}=U_n\cdot A \\ U_0 \end{cases} \Leftrightarrow U_n=A^nU_0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

b. Etude de suites de la forme $U_{n+1}=AU_n+B$ ou $U_{n+1}=U_nA+B$

Soit (U_n) une suite de matrice colonne, A une matrice carrée et B une matrice colonne définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1}=A\cdot U_n+B \\ U_0 \end{cases} \Leftrightarrow U_n=A^n(U_0-C)+C \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

avec $C=(I_k-A)^{-1}B$ (distribution invariante)

Soit (U_n) une suite de matrice ligne, A une matrice carrée et B une matrice ligne définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1}=U_n\cdot A+B \\ U_0 \end{cases} \Leftrightarrow U_n=(U_0-C)A^n+C \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

avec $C=B\cdot(I_k-A)^{-1}$ (distribution invariante)

4. Chaînes de Markov

a. Définitions

- graphe pondéré : Les arêtes sont affectées d'un poids (réel positif)
- graphe probabiliste : graphe orienté pondéré pour lequel la somme des arêtes sortantes d'un sommet vaut 1
- chaîne de Markov : Processus stochastique sans mémoire dont l'information utile pour prévoir le futur est placée dans l'instant présent (sans mémoire)

b. Propriétés

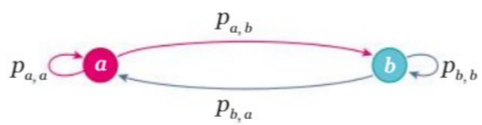
Une suite $(X_n)_{n>0}$ de variables aléatoires est une chaîne de Markov à n états lorsque : $p_{X_n=x_n}(X_{n+1}=x_{n+1})=p_{X_0=x_0,X_1=x_1\ldots X_n=x_n}(X_{n+1}=x_{n+1})$

On appelle espace des états d'une chaîne de Markov les valeurs prises par (X_n)

On appelle probabilité de transition $p_{X_n=x_n}(X_{n+1}=x_{n+1})$

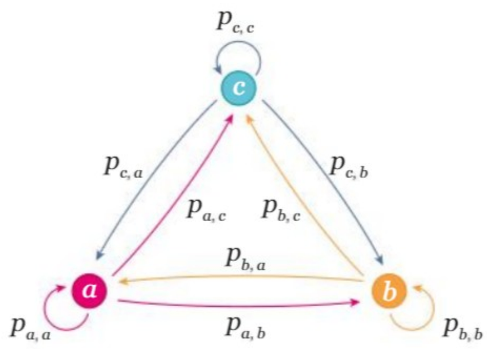
Graphe d'une chaîne de Markov à deux états

$p_{X_k=a}(X_{k+1}=b)=p_{a,b}$



Graphe d'une chaîne de Markov à trois états

$p_{X_k=c}(X_{k+1}=b)=p_{c,b}$

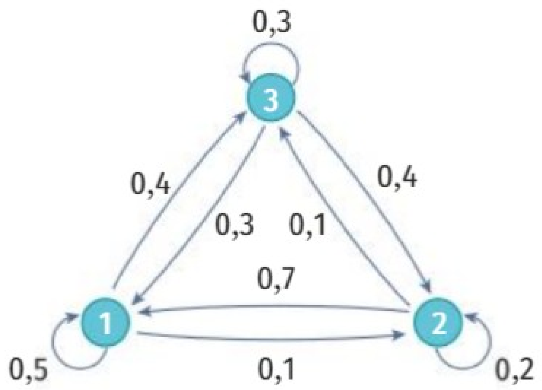


c. Représentation matricielle

On considère une chaîne de Markov à n états et on note $E=\{1;2;\ldots n\}$ l'espace des états

La matrice de transition P associée à cette chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre n telle que $p_{i,j}=p_{X_n=i}(X_{n+1}=j)$

Exemple :



$$P=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

d. Evolution d'une chaîne de Markov

- étude sur plusieurs rangs

On considère une chaîne de Markov (X_n) de matrice de transition P et π_0 la distribution initiale, On appelle π_n la loi de (X_n)

$\forall n\in\mathbb{N} \quad \pi_{n+1}=\pi_n P$ et $\pi_n=\pi_0 P^n$

- distribution invariante d'une chaîne de Markov

Soit $(X_n)_{n>0}$ une chaîne de Markov à n états de matrice de transition P

Il existe une distribution invariante avec $\pi P=\pi$ pour les cas suivants :

- chaîne de Markov à 2 ou 3 états
- lorsque la matrice de transition ne contient aucun 0 (sauf sur la diagonale)