Nombres complexes – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

1. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1=\frac{1+i}{i}$ **b.** $z_2=\frac{1}{1-i}$ **c.** $z_3=\frac{-2+i}{2+i}$

2. On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1=1+i \quad \text{et} \quad z_2=5-2i$$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

a. z_1+z_2 **b.** z_1-z_2 **c.** z_1-2z_2

d. $z_1\times z_2$ **e.** $\frac{z_1}{z_2}$ **f.** $\frac{z_2}{z_1-z_2}$

Exercice 2 corrigé disponible

Ecrire sous forme algébrique : $z_1=\frac{7+i}{3-2i}$ $z_2=\frac{-3}{(1+i)(2-i)}$

Exercice 3 corrigé disponible

Déterminer le conjugué du nombre complexe suivant et l'écrire sous forme algébrique :

$$z_1=\frac{2+i}{1-2i}$$

Exercice 4 corrigé disponible

Développer $(3+2i)^5$ et $(1-i)^8$

Exercice 5 corrigé disponible

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $3z+iz=0$ **b.** $z+2iz=i$ **c.** $z+2-i(z+1)=0$

d. $\frac{z-5}{z-i}=i$ **e.** $2iz-3=z+1$ **f.** $3z-5+2iz=2i-3z+4iz$

g. $\frac{z-1}{iz+3}=4i$ h. $3z(z+i)=-iz$ i. $-\frac{z}{iz+1}+\frac{3z}{z-1}=3+i$

Exercice 6 corrigé disponible

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les équations suivantes

1. $(2+3i)z-(5+2i)=3z+4i$.

2. $(7-i)\overline{z}=3$.

3. $iz+2\overline{z}=i-1$.

4. $2z-3i\overline{z}=-13+12i$

Exercice 7 corrigé disponible

Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $2z^2-6z+5=0$ **2.** $z^2+z+1=0$ **3.** $z^2-5z+9=0$

4. $z^2-3z+4=0$ **5.** $z^2-z+10=0$ **6.** $z^2-4z-1=0$

Exercice 8 corrigé disponible

On considère sur $\mathbb{C}$ l'équation suivante : *(E)* $z^3+4z^2+2z-28=0$

1. Déterminer deux réels *a* et *b* tels que l'équation *(E)* s'écrive :

(E) $(z-2)(z^2+a.z+b)=0$

2. Résoudre l'équation *(E)*

Exercice 9 corrigé disponible

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i$$

1. Vérifier que pour tout nombre complexe *z*, $f(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$

Exercice 10 corrigé disponible

1. Dans $\mathbb{C}$ on considère le polynôme $z^2+6z+25$; déterminer ses racines.

2. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe *a* et *b* définis par :

$$a=(1+2i)^2 \quad ; \quad b=(1-2i)^2$$

3. En déduire les solutions de l'équation : $z^4+6z^2+25=0$

Exercice 11 **corrigé disponible**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \overline{z} + \frac{1}{4} = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

Exercice 12 **corrigé disponible**

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z^2+1)Q(z)$.

b) En déduire toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P.

Exercice 13 **corrigé disponible**

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z) = (z-i)(z^2+pz+q)$.

3. Résoudre $P(z)=0$

Exercice 14 **corrigé disponible**

Soit $A(1;0)$; pour tout nombre complexe z différent de 1, on définit $Z=\dfrac{z-2i}{z-1}$. On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$ avec x, y, X et Y réels

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble ϵ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 15 **corrigé disponible**

Soit $A(0;1)$; Pour tout nombre complexe z différent de i, on définit $Z=\dfrac{z+3}{z-i}$ On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$ avec x, y, X et Y réels

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble ϵ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 16 **corrigé disponible**

Calculer le module de chacun des nombres complexes donnés :

1. $z_1=1+3i$ **2.** $z_2=3-4i$
3. $z_3=-1+7i$ **4.** $z_4=-5-3i$

Exercice 17 **corrigé disponible**

Déterminer un argument de chacun des nombres complexes donnés :

1. $z_1=-1+i$
2. $z_2=i$
3. $z_3=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$
4. $z_4=(2+2i)(1-i)$
5. $z_5=i(\sqrt{6}-i\sqrt{2})$
6. $z_6=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2i}$

Exercice 18 **corrigé disponible**

On considère le nombre complexe : $z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et un argument de z^2. En déduire le module et un argument de z.
3. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de : $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=\sqrt{2}$

Exercice 19

Soit : $Z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$; $Z_2=1-i$; $Z_3=\dfrac{Z_1}{Z_2}$

1. Mettre Z_3 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et l'argument de Z_1 et de Z_2.
3. Ecrire Z_3 sous forme trigonométrique. En déduire : $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 20

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z_1 = -2+2i$ et $z_2 = -3-i\sqrt{3}$.
Ecrire ensuite la forme exponentielle du produit $z_1 z_2$.

Exercice 21

Ecrire les nombres suivants sous forme exponentielle :

$$z_1 = \left(3+i\sqrt{3}\right)^4 \qquad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \qquad z_3 = \frac{\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}$$

Exercice 22

1. Montrer qu'il n'y a qu'une seule racine cubique de 1 dont la partie imaginaire est strictement positive. On note j cette racine.
2. Montrer que :
   a. $\bar{j} = j^2$
   b. $1+j+j^2=0$
   c. $|1+j|=1$

Exercice 23

On considère le nombre complexe $a = \left(-\sqrt{3}+i\right)^{2\,013}$.

1) Déterminer la forme exponentielle de : $-\sqrt{3}+i$
2) Montrer que a est un imaginaire pur

Exercice 24

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1+i, \quad b = 3i, \quad c = \left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)$$

Montrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Exercice 25

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta\ [2\pi] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} z & = & r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r & > & 0 \end{array}\right.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

1) Rapeller les expressions de : $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$
2) Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Exercice 26

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives $z_A = -1$, $z_B = 2+i\sqrt{3}$, $z_C = 2-i\sqrt{3}$ et $z_G = 3$.

a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.
b. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.
c. Calculer un argument du nombre complexe :

$$\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$$

En déduire la nature du triangle GAC.

Exercice 27

Représenter les ensembles suivants

$$\mathscr{E}_1 = \left\{M(z)\ /\ \arg(z+3\mathrm{i}) = \frac{\pi}{6}\ \ (\pi)\right\}$$

$$\mathscr{E}_2 = \{M(z)\ /\ |z+4+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|\}$$

$$\mathscr{E}_3 = \{M(z)\ /\ |z-4\mathrm{i}| = 2\}$$

Exercice 28

Représenter les ensembles suivants sur le graphique ci-dessous (on ne demande pas de justification)

$$\mathscr{E}_1 = \left\{M(z)\ /\ \arg(z-2\mathrm{i}+1) = \frac{2\pi}{3}\ \ (2\pi)\right\}$$

$$\mathscr{E}_2 = \left\{M(z)\ /\ \arg\left(\frac{z-2\mathrm{i}+1}{z-3+\mathrm{i}}\right) = \pi\ \ (2\pi)\right\}$$

$$\mathscr{E}_3 = \left\{M(z)\ /\ Z = \mathrm{i}\frac{z-2\mathrm{i}+1}{z-3+\mathrm{i}} \in \mathbb{R}_+\right\}$$

$$\mathscr{E}_4 = \{M(z)\ /\ |z+2+\mathrm{i}| = |z-2\mathrm{i}|\}$$

Exercice 29

Déterminer les lieux de points décrits par le point *M(z),* où *z* est un nombre complexe :

1. $|z|=|\bar{z}-2+i|$ **2.** $\arg(z+2i)=\dfrac{\pi}{4}$ **3.** $z^2-2\bar{z}+1\in\mathbb{R}$

4. $z^2-2\bar{z}+1\in\mathbb{R}$

Exercice 30

1) Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe vérifiant :
   a) $|z-1|=|z-i|$
   b) $|z+i|=4$
2) Donner, dans chaque cas, une équation cartésienne de l'ensemble trouvé.

Exercice 31

A chaque point M d'affixe z du plan complexe, on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{z+2}{1+iz}$.

1) On note A le point d'affixe -2 et B celui d'affixe i.
   Interpréter géométriquement le module de z'.
2) Déterminer géométriquement l'ensemble des points M tels que $|z'|=1$.
   Donner une équation cartésienne de cet ensemble.

Exercice 32

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=-1$ et $z_B=3i$.

Soit la fonction f privé du point A dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=i\left(\frac{z-3i}{z+1}\right)$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C=2-i$.
Montrer qu'il existe un seul point D tel que f(D)=C.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. A l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :

$$OM'=\frac{BM}{AM} \quad \text{et} \quad \left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right)=\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) \quad [2\pi]$$

4. En déduire et construire les ensembles de points suivants :

a. L'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit située sur un cercle (Γ) de centre O, de rayon 1.

b. L'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M′ soit réelle.

Exercice 33

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) **Affirmation 1 :**
   Le point d'affixe $(-1+i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
2) **Affirmation 2 :**
   Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z-\bar{z}+2-4i=0$ admet une solution unique.

Exercice 34

1) **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2) **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.
3) **Affirmation 3 :** L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z-i|=|z+1|$ est une droite.
4) **Affirmation 4 :** Le nombre complexe $\left(1+i\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

Exercice 35

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre ou trois propositions est exacte.

1) Soit $z_1=\sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

   a) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}$ b) $\sqrt{12}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}$ c) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$ d) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2) L'équation $-z=\bar{z}$, d'inconnue complexe z, admet :
   a) une solution
   b) deux solutions
   c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
   d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.
3) Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+i|=|z-i|$.
   a) Γ est l'axe des abscisses.

b) Γ est l'axe des ordonnées.

c) Γ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

4) On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\frac{c}{b} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a) Le triangle OBC est isocèle en O.

b) Les points O, B, C sont alignés.

c) Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

Exercice 36

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1) Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :

a) 3 **b)** i **c)** $3 + i$

2) Soit z un nombre complexe ; $|z + i|$ est égal à :

a) $|z| + 1$ **b)** $|z - 1|$ **c)** $|i\bar{z} + 1|$

3) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a) $-\frac{\pi}{3} + \theta$ **b)** $\frac{2\pi}{3} + \theta$ **c)** $\frac{2\pi}{3} - \theta$

4) Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

a) $n = 3$ **b)** $n = 6k + 3,\ k \in \mathbb{N}$ **c)** $n = 6k,\ k \in \mathbb{N}$

5) Soient A et B deux points d'affixe respective i et -1. l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :

a) la droite (AB) **b)** le cercle de diamètre [AB] **c)** la droite perpendiculaire à (AB) passant par O

6) Soit Ω le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :

a) $y = -x + 1$ **b)** $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ **c)** $z = 1 - i + 5e^{i\theta}$ avec θ réel

7) Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$ est :

a) $1 - 4i$ **b)** $-3i$ **c)** $7 + 4i$

8) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$ est :

a) $\{1 - i\}$ **b)** L'ensemble vide **c)** $\{1 - i\ ;\ 1 + i\}$

Exercice 37 **corrigé disponible**

1. Démontrer la relation de Moivre en utilisant le principe du raisonnement par récurrence.
2. A l'aide du triangle de Pascal développer : $(a+b)^5$
3. Calculer $\cos(5a)$ en fonction de $\cos(a)$
4. En déduire $\cos\frac{\pi}{10}$
5. Calculer $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{5\pi}{5}$
6. Linéariser $\sin^3 x$, $\cos^4 x$, $\sin^4 x \cdot \cos x$
7. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$
8. Exprimer $\cos 4x$ avec $\cos x$ et ses puissances
9. Exprimer $\frac{\sin 4x}{\sin x}$ avec $\cos x$ et ses puissances