

Nombres complexes – Fiche de cours

1. L'idée des nombres complexes

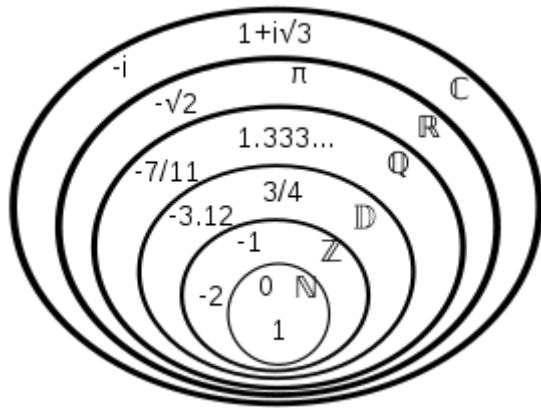
Résoudre des équations polynomiales de degré $n \geq 1$

Exemple : obtenir 3 solutions pour l'équation $x^3 + x + 1 = 0$

2. Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble noté \mathbb{C} tel que :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (avec perte de la comparaison)
- $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$



3. Nombre complexe

a. Définition

Un nombre complexe est défini par :

$z = x + iy$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe

x : partie réelle notée $\text{Re}(z)$

y : partie imaginaire notée $\text{Im}(z)$

b. Egalité de nombres complexes

$$z_1 \in \mathbb{C} \quad z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \\ \text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) \end{cases}$$

4. Opérations sur les nombres complexes

On considère les nombres complexes :

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad z' = x' + iy'$$

a. La somme

La somme complexe de z et z' est définie de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$z + z' = x + x' + i(y + y')$$

b. Le produit

Le produit complexe de z et z' est défini de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$z \cdot z' = xx' - yy' + i(x'y + xy')$$

c. Inverse d'un nombre complexe

L'inverse d'un nombre complexe z est défini de $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ par :

$$\frac{1}{z}$$

d. Conjugué d'un nombre complexe

Le conjugué d'un nombre complexe z est défini de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\bar{z} = x - iy$$

Propriétés pour $z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$:

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ avec $z' \neq 0$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$
- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ avec $z' \neq 0$

e. Formule du binôme

Soient 2 nombres complexes a et b alors pour tout n entier naturel :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

5. Equations du second degré

$\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R}$ on définit (E) $az^2 + bz + c = 0$

Considérons $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta > 0$ l'équation (E) admet 2 racines réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$ l'équation (E) admet une racine double réelle :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$ l'équation (E) admet 2 racines complexes et conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

6. Equations polynomiales

Soit le polynôme $P(z) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \cdot z^k$

- on appelle équation polynomiale de degré n $P(z) = 0$

- un polynôme de degré n admet au plus n racines complexes

- $P(a) = 0 \Leftrightarrow P(z) = (z - a) \cdot Q(z)$ $\text{Deg}(P) = n$ et $\text{Deg}(Q) = n - 1$

- $z^n - a^n = (z - a) \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot z^{n-k-1}$

7. Représentation graphique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$

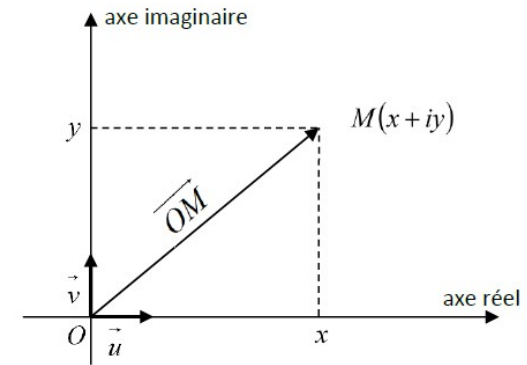
A tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le point $M(x; y)$

Propriétés :

- M s'appelle l'image de z

- z s'appelle l'affixe de M

- soit I le milieu du segment AB ; I pour affixe $z_I = \frac{(z_A + z_B)}{2}$



8. Forme trigonométrique des nombres complexes

a. Module et argument d'un nombre complexe

Soit le nombre complexe $z = x + iy$ ayant pour image M dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On définit le module de z par $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ avec $r > 0$

Ou bien $|z| = \sqrt{\text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z)}$

On définit un argument de z par $\theta = \arg(z) = (\vec{u}; \vec{OM}) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

La forme trigonométrique est définie par : $z = |z|(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$

b. Propriétés des modules et arguments

- Modules

Produit	$ zz' = z \times z' $
Inverse ($z \neq 0$)	$\left \frac{1}{z} \right = \frac{1}{ z }$
Quotient ($z' \neq 0$)	$\left \frac{z}{z'} \right = \frac{ z }{ z' }$
Puissance ($n \in \mathbb{Z}$)	$ z^n = z ^n$

- Arguments

Produit	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' (2\pi)$
Inverse	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z (2\pi)$
Quotient	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' (2\pi)$
Puissance	$\arg(z^n) = n \arg z (2\pi)$

c. Propriétés du conjugué

- $|\bar{z}| = |z|$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

d. Forme algébrique vers forme trigonométrique

Soit le nombre complexe $z = x + iy = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

- on calcule $|z|$ $\cos \theta = \frac{x}{|z|} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ $\sin \theta = \frac{y}{|z|} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$
- on place un point $M(\cos \theta ; \sin \theta)$ sur le cercle trigonométrique
- on détermine $(\vec{u}; \vec{OM})$ et l'on indique une valeur de θ

9. Notation exponentielle

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \text{ on pose } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

La forme exponentielle d'un nombre complexe est définie par :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

10. Formules d'Euler

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

11. Formule de Moivre

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

12. Formule de trigonométrie

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

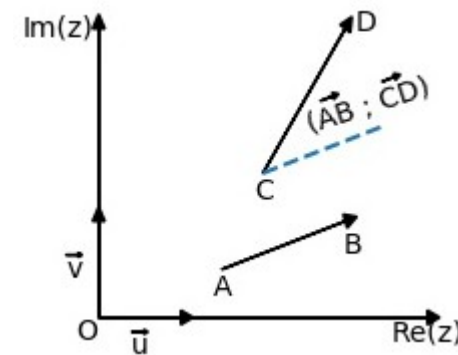
$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

13. Nombres complexes et géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$

Soient A, B, C et D des points du plan d'affixes z_A , z_B , z_C et z_D



a. Affixe d'un vecteur

A tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le vecteur $\vec{w}(x; y)$

Propriétés :

- \vec{w} s'appelle le vecteur image de z
- z s'appelle l'affixe de \vec{w}

$$\vec{AB} = z_{\vec{AB}} = z_B - z_A \quad \text{et} \quad \vec{CD} = z_{\vec{CD}} = z_D - z_C$$

b. Norme d'un vecteur

$$\|\vec{AB}\| = AB = |z_B - z_A| \quad \text{et} \quad \|\vec{CD}\| = CD = |z_D - z_C|$$

c. Argument d'un vecteur

$$\arg(\vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \vec{AB}) \quad [2\pi]$$

d. Argument de 2 vecteurs

$$\arg(\vec{AB}; \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}; \vec{CD}) \quad [2\pi]$$

14. Racines nième de l'unité

Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité :

$$z_k = e^{i \frac{2\pi k}{n}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad \text{et} \quad n = \text{Deg}(z^n)$$

15. Inégalités triangulaires

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \quad |z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$$