Combinatoire et dénombrement – Fiche de cours

1. Cardinal d'ensembles

Soit A et B deux ensembles finis disjoints à a et b éléments

On note $Card(A)=a$ $Card(B)=b$ et $Card(A\cap B)=Card(\emptyset)=0$

2. Principes additif et multiplicatif

a. Principe additif

Soient une liste finie d'ensembles A_1, A_2, … A_n deux à deux disjoints et n un entier naturel

$Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)$

$Card(A_1\cup A_2\cup \dots A_n)=Card(A_1)+Card(A_2)+\dots+Card(A_n)$

b. Produit cartésien et principe multiplicatif

Produit cartésien :

Le produit cartésien de A et B noté $A\times B$ est l'ensemble des couples formés par les éléments de A et B $Card(A\times B)=a\cdot b$

Principe multiplicatif : $Card(A^n)=(Card(A))^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

c. Autres formules

Soient 3 ensembles A, B, C non disjoints

$Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$

$Card(A\cup B\cup C)=Card(A)+Card(B)+Card(C)-Card(A\cap B)$
$-Card(A\cap C)-Card(B\cap C)+Card(A\cap B\cap C)$

3. Dénombrement

a. Partie d'un ensemble

- Définition

Une partie de E est un sous-ensemble composé d'éléments $\in E$ dont le nombre est compris entre 0 et n

- Nombre de parties

Le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est 2^n

b. k-uplets et n-uplets

Soit E un ensemble à n éléments

- 1-uplet de E : un élément $\in E$
- 2-uplet de E (doublet / couple) : liste ordonnée de 2 éléments $\in E$
- 3-uplet de E (triplet) : liste ordonnée de 3 éléments $\in E$
- k-uplet de E : avec k<n, liste ordonnée de k éléments $\in E$
- n-uplet de E : liste ordonnée contenant tous les éléments $\in E$

c. Factorielle d'un entier naturel (nombre de permutations distinctes)

Soit n un entier naturel non nul ; on appelle factorielle n :

$$n!=1\times 2\times \dots\times n \quad \text{avec} \quad 0!=1$$

Une permutation d'un ensemble E à n éléments est un n-uplet distinct

Le nombre de permutations de E est $n!=1\times 2\times \dots\times n$

d. Combinaisons distinctes avec ordre

Le nombre d'arrangements ou k-uplets distincts est :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\forall k\in\mathbb{N}$ $0\le k\le n$

$$A_n^k=n\times(n-1)\times\dots(n-(k-1))=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Le nombre de combinaisons distinctes avec ordre de k éléments parmi n s'appelle nombre d'arrangements de k parmi n

e. Combinaisons distinctes sans ordre

Le nombre de combinaisons à k éléments de E :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\forall k\in\mathbb{N}$ $0\le k\le n$

$$\binom{n}{k}=C_n^k=\frac{A_n^k}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Le nombre de combinaisons distinctes sans ordre de k éléments parmi n s'appelle coefficient binomial de k parmi n

f. Autres formules

Nombre d'arrangements avec répétitions :

Le nombre d'arrangements à k éléments parmi n (k>n) est défini par : n^k

Nombre de combinaisons avec répétitions :

Le nombre de combinaisons à k répétitions parmi n éléments est défini par :

$$C_{n+k-1}^{k} \quad \text{avec} \quad k=\sum_{i=1}^{n} k_i$$

k_i nombre de répétitions du $i^{\text{ème}}$ élément

g. Propriétés des combinaisons

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \forall k\in\mathbb{N} \quad 0\leq k\leq n$

$$\binom{0}{0}=1 \;;\; \binom{n}{0}=1 \;;\; \binom{n}{1}=n \;;\; \binom{n}{n-1}=n \;;\; \binom{n}{n}=1$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

h. Relation et triangle de Pascal

- Relation de Pascal

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \forall k\in\mathbb{N} \quad 0\leq k\leq n \qquad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

- Triangle de Pascal

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1