Continuité – Exercices

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[\,3\,;+\infty\,[$ par :

$f(x) = E(x)$ pour $x \in [3\,;4[$

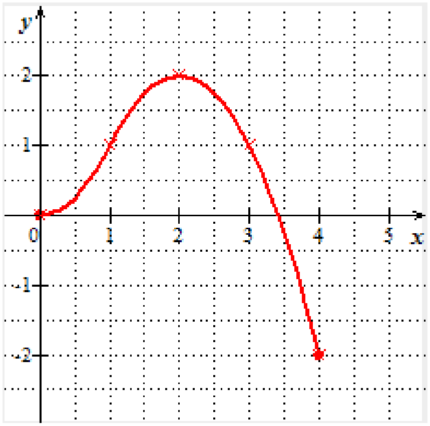
$f(x) = -x + 4$ pour $x \in [\,4\,;+\infty\,[$

a. Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormal du plan.

b. Cette fonction est-elle continue sur $[3\,;+\infty\,[$? Pourquoi ?

Exercice 2

La fonction donnée ci dessous représente une fonction définie sur [0 ;4].



1. a. Donner le tableau de variation de f.

b. La fonction f est-elle continue sur [0 ; 4] ?

2.a. Sur l'intervalle [2 ; 4], pour résoudre l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$, quel théorème peut-on appliquer et pourquoi ?

b. En appliquant ce théorème à l'intervalle [2 ; 4], montrer que l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$ admet une unique solution α.

c. Donner une valeur approchée de α.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;1\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 10x + 11}{2(x-1)^2}$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f peut s'écrire sous la forme : $f(x) = x + 3 + \dfrac{5}{2(x-1)^2}$
2. a. Calculer la limite de f aux bornes de son intervalle de définition
   b. Déterminer les asymptotes à la courbe
   c. Etudier la position relative de la courbe C et de la droite Δ d'équation : $y = x + 3$
3. On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		2.7		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	‖	$\searrow$	$6{,}5$	$\nearrow$	

   a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-4\,;-1\,[$.
   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.
   c. Combien l'équation $f(x) = 10$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$? Justifier.
4. Quels sont les points d'intersection de C avec l'axe des ordonnées ? l'axe des abscisses ?
5. Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les asymptotes, la courbe C, α et les points d'intersection avec les axes

Exercice 4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 4 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Montrer que f est continue en 1.
2) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier
3) La droite d'équation $x = 0$ est-elle asymptote à $\mathscr{C}_f$? Justifier
4) La droite d'équation $y = 1$ est-elle asymptote à $\mathscr{C}_f$? Justifier.

Exercice 5

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{3x}+1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{2+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. f est-elle continue en 0 ? Justifier.

2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier alors que $f(x) = 2$ admet trois solutions sur $[-4\,;\,4]$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [0\,;\,6]$, alors $f(x) \in [0\,;\,6]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0\,;\,6]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [2\,;\,5]$, alors $f(x) \in [2\,;\,5]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [2\,;\,5]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 9

Trouver la valeur de k telle que la fonction définie par $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + e^{x-1} & \text{si } x \leqslant 1 \\ x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $[-6\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{6+x}.$$

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante, majorée par 3.

2. Que peut-on dire de la convergence de la suite ?

3. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 11

1) Soit le polynome P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

   a) Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ du polynome P
   b) Déterminer les variations de P sur $\mathbb{R}$.
   c) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-1, 0]$.
   d) Donner un encadrement de α à 10^{-5}
   e) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \dfrac{2}{x^2+1}$

   On admet que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

   a) Déterminer la dérivée de f et montrer que : $f'(x) = \dfrac{(x+1)P(x)}{(x^2+1)^2}$
   b) A l'aide de la question 1e) déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f

Exercice 12

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser son tableau de variations.
2. Soit (E) l'équation
$$x^3 - 3x^2 = 5$$
   Montrer que (E) admet une solution α unique sur $\mathbb{R}$ et déterminer une valaur approchée par défaut de α à 10^{-3}.
3. Montrer *(en utilisant la définition de α)* que
$$\alpha^2 = \frac{5}{\alpha - 3}$$

Exercice 13

Fonction rationnelle et fonctions auxiliaire

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 1cm)

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

   On pose : $g(x) = x^3 + 3x + 8$

   a) Étudier les variations de la fonction g.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-2; 0]$
   c) Déterminer un encadrement à 10^{-3} à l'aide de votre calculatrice.
   d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

2) **Étude de la fontion f**

   a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
   b) Calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = \dfrac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2}$
   c) À l'aide d'un tableau de signe donner le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
   d) En écrivant $f(x) = \dfrac{x(x^3-4)}{x^3+x}$, montrer alors que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$
   e) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$
   f) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = x$?

Exercice 14

On considère la fonction h définie par : $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

1. Dresser le tableau de variation de h.

2. Pour k réel donné, étudier le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$h(x) = k.$$

3. Démontrer que l'équation $h(x) = 8$ a une solution unique α. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 15

1. On considère P définie sur $D =]-1;+\infty[$ par
$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$
   (a) Etudier les variations de P
   (b) Montrer que $P(x) = 0$ admet une unique racine réelle α sur D et que $1 \leq \alpha \leq 2$.
2. On considère la fonction numérique f définie sur D par
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$
   (a) Déterminer les limites de f aux bornes de D.
   (b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. En utilisant la définition de α, montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$.

Exercice 16

Soit le polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$
2) Déterminer la dérivée de P.
3) Étudier le signe de P' puis dresser le tableau de variation.
4) Montrer qu'il existe une unique solution α sur $\mathbb{R}$ à l'équation $P(x) = 0$. On **citera** le théorème utilisé.
5) Montrer que $1 < \alpha < 2$ puis déterminer avec l'algorithme par dichotomie un encadrement à 10^{-4} près de α. On donnera le nombre de boucles nécessaires pour obtenir cette précision.

Exercice 17

Déterminer les deux nombres réels k_1 et k_2 pour que

la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x+k_1}{x^2+1} & \text{si } 0 < x \leqslant 8 \\ \sqrt{x+1}+k_2 & \text{si } x > 8 \end{cases}$

soit continue sur $\mathbb{R}$.