Continuité – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur [3 ; + ∞ [par :

$f(x) = \ E(x)$ pour $x \in [3 ; 4[$

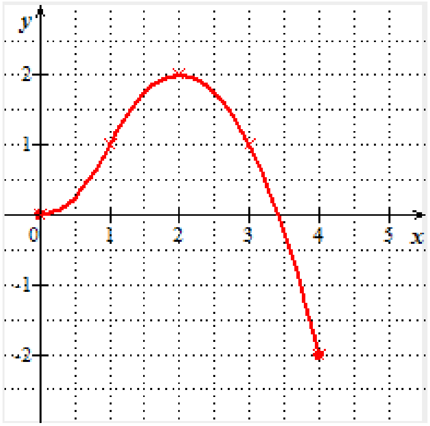
$f(x) = - \ x + 8$ pour $x \in [4 ; +\infty [$

a. Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormal du plan.

b. Cette fonction est-elle continue sur [3 ; + ∞ [? Pourquoi ?

Exercice 2 corrigé disponible

La fonction donnée ci dessous représente une fonction définie sur [0 ;4].



1. a. Donner le tableau de variation de f.

b. La fonction f est-elle continue sur [0 ; 4] ?

2.a. Sur l'intervalle [2 ; 4], pour résoudre l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$, quel théorème peut-on appliquer et pourquoi ?

b. En appliquant ce théorème à l'intervalle [2 ; 4], montrer que l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$ admet une unique solution α.

c. Donner une valeur approchée de α.

Exercice 3 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur] – ∞ ; 1 [∪] 1 ; + ∞ [par : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 10x + 11}{2(x-1)^2}$

On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		2.7		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↘	$6{,}5$	↗	

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle] – 4 ; – 1 [.

b. Donner une valeur approchées de α à 10^{-2} près

c. Combien l'équation $f(x) = 10$ admet-elle de solutions dans l'intervalle] 1 ; + ∞ [? Justifier.

Exercice 4 corrigé disponible

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 4 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Montrer que f est continue en 1.

2) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier

Exercice 5 corrigé disponible

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{3x}+1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{2+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. f est-elle continue en 0 ? Justifier.

2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 6 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier alors que $f(x) = 2$ admet trois solutions sur $[-4 ; 4]$.

Exercice 7 corrigé disponible

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [0 ; 6]$, alors $f(x) \in [0 ; 6]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0 ; 6]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 8 corrigé disponible

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [2 ; 5]$, alors $f(x) \in [2 ; 5]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [2 ; 5]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 9 corrigé disponible

Trouver la valeur de k telle que la fonction définie par $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + e^{x-1} & \text{si } x \leqslant 1 \\ x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $[-6 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{6+x}.$$

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante, majorée par 3.

2. Que peut-on dire de la convergence de la suite ?

3. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 11

1) Soit le polynome P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

   a) Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ du polynome P
   b) Déterminer les variations de P sur $\mathbb{R}$.
   c) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-1, 0]$.
   d) Donner un encadrement de α à 10^{-5}
   e) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x

Exercice 12

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser son tableau de variations.
2. Soit (E) l'équation $x^3 - 3x^2 = 5$

   Montrer que (E) admet une solution α unique sur $\mathbb{R}$ et déterminer une valaur approchée par défaut de α à 10^{-3}.
3. Montrer *(en utilisant la définition de α)* que

$$\alpha^2 = \frac{5}{\alpha - 3}$$

Exercice 13

On considère la fonction h définie par : $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

1. Dresser le tableau de variation de h.

2. Pour k réel donné, étudier le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$h(x) = k.$$

3. Démontrer que l'équation $h(x) = 8$ a une solution unique α.

Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 1cm)

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

   On pose : $g(x) = x^3 + 3x + 8$

   a) Étudier les variations de la fonction g.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-2; 0]$
   c) Déterminer un encadrement à 10^{-3} à l'aide de votre calculatrice.
   d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Exercice 15

1. On considère P définie sur $D =]-1; +\infty[$ par

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

   (a) Etudier les variations de P
   (b) Montrer que $P(x) = 0$ admet une unique racine réelle α sur D et que $1 \leq \alpha \leq 2$.
2. On considère la fonction numérique f définie sur D par

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x^3}$$

   (a) Déterminer les limites de f aux bornes de D.
   (b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. En utilisant la définition de α, montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2(1 - \alpha)}{3(1 + \alpha^2)}$.

Exercice 16

Soit le polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$
2) Déterminer la dérivée de P.
3) Étudier le signe de P' puis dresser le tableau de variation.
4) Montrer qu'il existe une unique solution α sur $\mathbb{R}$ à l'équation $P(x) = 0$. On citera le théorème utilisé.
5) Montrer que $1 < \alpha < 2$ puis déterminer avec l'algorithme par dichotomie un encadrement à 10^{-4} près de α. On donnera le nombre de boucles nécessaires pour obtenir cette précision.

Exercice 17

Déterminer les deux nombres réels k_1 et k_2 pour que

la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x+k_1}{x^2+1} & \text{si } 0 < x \leqslant 8 \\ \sqrt{x+1}+k_2 & \text{si } x > 8 \end{cases}$

soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{-2x^2+3x+2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = a & (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$

1°) Déterminer le domaine de définition de f.

2°) Déterminer a pour que f soit continue en 2.

3°) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Que peut-on conclure pour la courbe (C) de f ?

4°) Etudier la limite eventuelle de f en $-\dfrac{1}{2}$. Que peut-on conclure pour la courbe (C) de f ?

Exercice 19

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ m & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Quelle valeur doit-on donner à m pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 20

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

1°) a) Montrer que f est définie sur $D = [-3\ ,\ +\infty[\setminus \{1\}$

b) Justifier que f est continue sur D

c) Calculer , en justifiant votre réponse , $\lim\limits_{x \to 6} g(x)$

2°) a) Montrer que pour tout $x \in D$ on a : $g(x) = \sqrt{x+3}+2$. En déduire $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

b) g est -elle prolongeable par continuité en 1 ? Justifier .

3°) Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2-2x-1}{-2x^2+5x-3} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = 4 & \end{cases}$

a) Etudier la continuité de f en 1

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$