

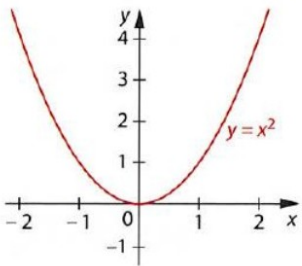
# Continuité – Fiche de cours

## 1. Notion de continuité

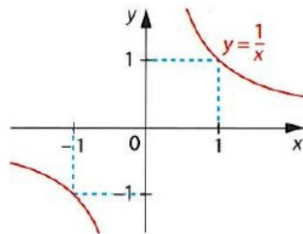
### a. Définition

Une fonction définie sur un intervalle  $I$  est continue si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille)

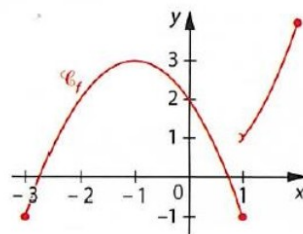
• La fonction carré est continue sur  $\mathbb{R}$ .



• La fonction inverse est continue sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$  (mais pas sur  $\mathbb{R}$ ).



•  $f$  est définie mais pas continue sur  $[-3; 2]$ . Il y a une rupture en  $x = 1$ .



Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un réel appartenant à  $I$  :

-  $f$  est continue en  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

-  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  lorsqu'elle est continue en tout réel  $a$  de cet intervalle

### b. Propriétés

- Les fonctions usuelles (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue, exponentielles, ) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  est continue sur  $I$  ; la réciproque est fautive

## 2. Théorème des valeurs intermédiaires

On souhaite résoudre l'équation  $f(x) = k$

Soit  $f$  une **fonction continue et strictement monotone** sur un intervalle  $[a; b]$ .

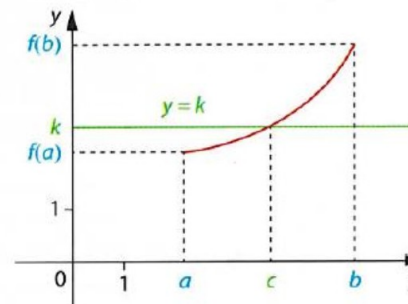
Cas de  $f$  croissante :

Si  $k \in [f(a); f(b)]$  alors il existe un unique  $\alpha \in [a; b]$  tel que  $f(\alpha) = k$

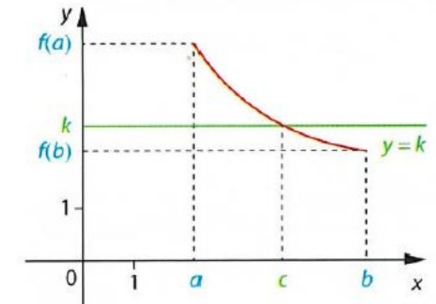
Cas de  $f$  décroissante :

Si  $k \in [f(b); f(a)]$  alors il existe un unique  $\alpha \in [a; b]$  tel que  $f(\alpha) = k$

• Cas où  $f$  est strictement croissante



• Cas où  $f$  est strictement décroissante



## 3. Application aux suites

### a. Application de la continuité

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $I$  convergeant vers  $L \in I$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(L)$$

### b. Théorème du point fixe

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $I$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$

Si  $(u_n)$  converge vers  $L$  alors  $L$  est solution de l'équation  $f(x) = x$