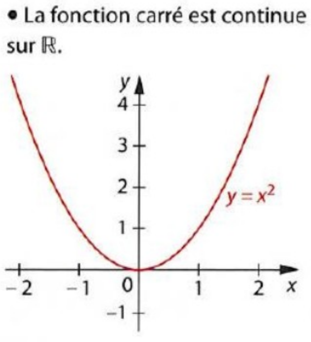
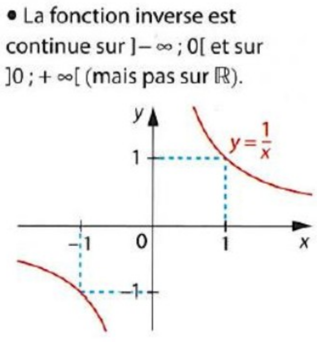
Continuité – Fiche de cours

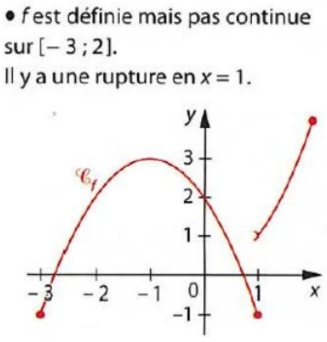
1. Notion de continuité

a. Définition

Une fonction définie sur un intervalle *I* est continue si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille)







Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I :

- f est continue en a lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- f est continue sur un intervalle I lorsqu'elle est continue en tout réel a de cet intervalle

b. Propriétés

- Les fonctions usuelles (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue, exponentielles,) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Une fonction dérivable sur un intervalle *I* est continue sur *I* ; la réciproque est fausse

2. Théorème des valeurs intermédiaires

On souhaite résoudre l'équation $f(x) = k$

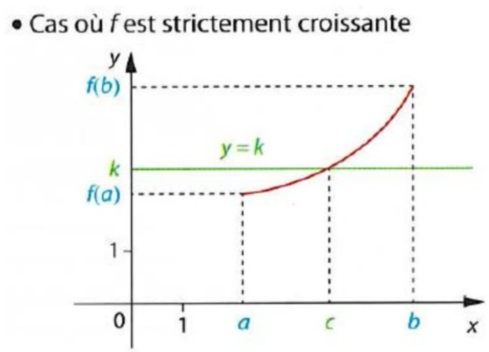
Soit f une **fonction continue et strictement monotone** sur un **intervalle [*a*; *b*]**.

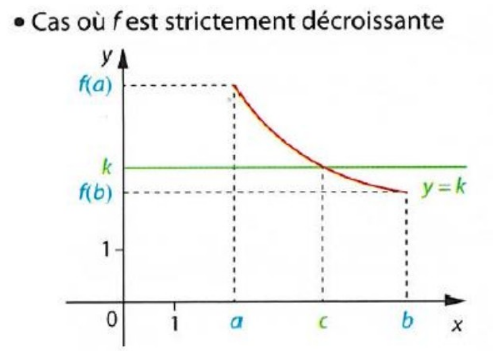
Cas de f croissante :

Si $k \in [f(a); f(b)]$ alors il existe un unique $\alpha \in [a ; b]$ tel que $f(\alpha) = k$

Cas de f décroissante :

Si $k \in [f(b); f(a)]$ alors il existe un unique $\alpha \in [a ; b]$ tel que $f(\alpha) = k$





3. Application aux suites

a. Application de la continuité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $L \in I$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(L)$$

b. Théorème du point fixe

Soit f une fonction définie et continue sur I à valeurs dans I et $u_{n+1} = f(u_n)$

Si (u_n) converge vers L alors L est solution de l'équation $f(x) = x$