

Fonctions trigonométriques – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $]-\pi; \pi]$

- $\cos(x) = \frac{1}{2}$
- $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(x) < \frac{-\sqrt{3}}{2}$
- $\sin(x) = \cos(x)$
- $2 \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$
- $3 \sin^2(x) - 4 = 0$

Exercice 2 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x^2-1)}$

Exercice 3 corrigé disponible

Soit la fonction f définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) - \sin(x)$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- Montrer que la fonction f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
- Démontrer que pour tout x réel $f'(x) = 2 \cos^2(x) - \cos(x) - 1$.
- Factoriser $2X^2 - X - 1$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$
- Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$
- Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0; \pi]$ puis sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$

Exercice 4 corrigé disponible

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow -\sin(x) \cdot \cos(x)$

- Montrer que f est impaire et π -périodique
- Montrer que pour tout réel $x \quad f'(x) = 2\left(\sin(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- Déterminer l'intersection de la courbe f avec chacun des axes
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f à l'origine
- Tracer la courbe de f pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$

Exercice 5 corrigé disponible

Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow (1 + \cos(x)) \cdot \cos(x)$ et C sa courbe représentative

- Rappeler les propriétés de parité et de périodicité de la fonction cosinus.
- Etudier la parité et la périodicité de h .
- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = -(1 + 2 \cdot \cos x) \cdot \sin x$.
- Résoudre $1 + \cos x = 0$ puis $1 + \cos x > 0$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- Dresser le tableau de signes de $h'(x)$ pour $x \in [0; \pi]$; en déduire le tableau de variations de h sur cet intervalle.
- Expliquer comment on peut déduire de la question (2) la courbe de C sur \mathbb{R} à partir de la courbe sur $[0; \pi]$.
- Représenter la courbe C sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 6 corrigé disponible

Soit g la fonction définie pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$ par $g(x) = \sqrt{2}x + 2 \sin(x)$

- Démontrer que g est une fonction impaire.
- Justifier brièvement la dérivabilité de g et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in [0; 2\pi]$.
- Dresser le tableau de signes de $g'(x)$ puis le tableau de variations de g pour $x \in [0; 2\pi]$
- Déduire des questions 1. et 2. le tableau de variations de g sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$

Exercice 7 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

- 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-3 \leq f(x) \leq 3$
- 2) Déterminer la parité de la fonction f
- 3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + \pi) = f(x)$. En déduire que f est périodique et préciser sa période.
- 4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -6 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
- 5) a) Montrer que si $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $2x + \frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$. En déduire le signe de f' sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$
b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$
c) Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$
- 6) Donner l'équation de la tangente en f au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$

Exercice 8 corrigé disponible

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin x \cdot (1 + \cos x)$

1. Démontrer que f est impaire et périodique. En déduire que l'on peut restreindre l'étude sur $[0; \pi]$
2. Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$
3. Donner l'allure de la courbe sur $[-2\pi; 2\pi]$

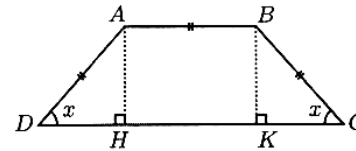
Exercice 9 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$

1. On appelle g la fonction définie sur I par $g(x) = \tan x - x$
 - a. Déterminer les limites de g aux bornes de I .
 - b. Etudier les variations de g .
 - c. Calculer $g(0)$ et déterminer le signe de $g(x)$ sur I .
2. a. Justifier que f est dérivable sur I et calculer f'
b. Factoriser $f'(x)$ pour tout x de I puis en utilisant la question 1, déterminer le signe de $f'(x)$ sur I .
c. Déterminer les variations de f sur I . En déduire le signe de f sur I .

Exercice 10 corrigé disponible

On considère le trapèze isocèle $ABCD$ ci-dessous où $AD = AB = BC = 1$.
On note x la mesure en radians des angles \widehat{ADC} et \widehat{BCD} .



Le but de l'exercice est de trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du trapèze est maximum.

1. Exprimer la hauteur h du trapèze en fonction de x .
2. Démontrer que l'aire \mathcal{A} du trapèze est définie, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\mathcal{A}(x) = \sin(x)(1 + \cos(x)).$$

3. Démontrer que la dérivée \mathcal{A}' de la fonction \mathcal{A} est définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\mathcal{A}'(x) = 2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1.$$

4. Factoriser le trinôme $2X^2 + X - 1$ et en déduire une factorisation de $\mathcal{A}'(x)$.
5. Etudier le signe de $\mathcal{A}'(x)$ et dresser le tableau de variation de \mathcal{A} .
6. Conclure.

Exercice 11 corrigé disponible

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ où x désigne un réel.

On note \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère orthogonal où 3 cm représente π sur l'axe des abscisses et 2cm représente une unité sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que f est définie sur \mathbb{R} , c'est-à-dire que, pour tout réel x , le dénominateur $2 + \cos x$ ne s'annule jamais.
2. a. Démontrer que f est périodique de période 2π .
b. Démontrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
c. A l'aide des deux questions précédentes démontrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.
3. a. Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1 + 2 \cos x}{(2 + \cos x)^2}$.
b. Etudier le signe de f' sur $[0; \pi]$.
c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
4. Dans le repère décrit ci-dessus représenter \mathcal{C} restreinte à l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$.

Exercice 12 corrigé disponible

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 5 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

1. Démontrer que $f(x)$ est 4π -périodique et que par conséquent l'étude de la fonction f peut être restreint à l'intervalle $I = [0 ; 4\pi]$.
2. Etudier les variations de f sur I .
3. Démontrer que f admet plusieurs tangentes horizontales sur I . Donner leur équation.
4. Représenter f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) pour x appartenant à $[0 ; 4\pi]$.
5. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $f(x) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 13 corrigé disponible

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB]. La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle \widehat{ATB} le plus grand possible.

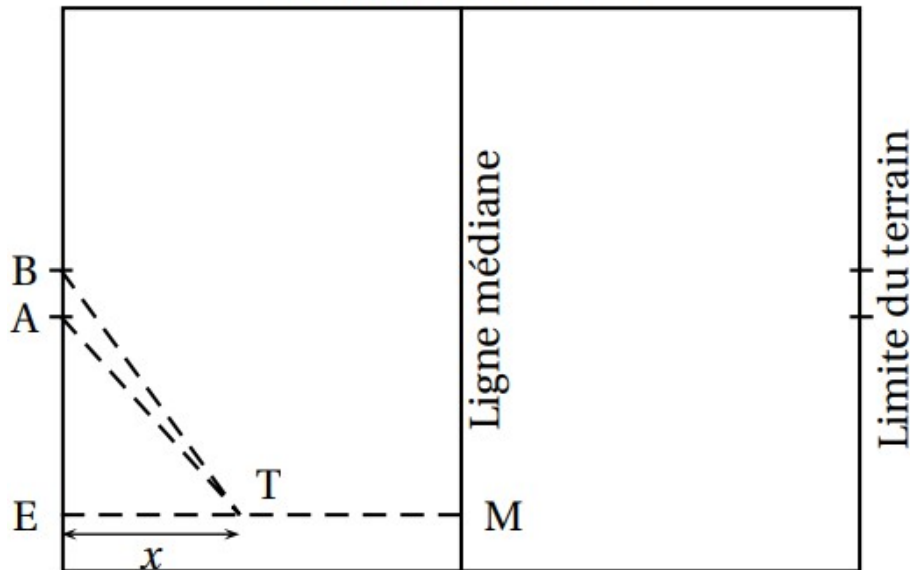
Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle \widehat{ATB} est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m.

On note α la mesure en radian de l'angle \widehat{ETA} , β la mesure en radian de l'angle \widehat{ETB} et de γ la mesure en radian de l'angle \widehat{ATB} .

Terrain vu de dessus



1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan \alpha$ et $\tan \beta$ en fonction de x .

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.

3. L'angle \widehat{ATB} admet une mesure de γ appartenant à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$,

résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

Montrer que $\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$

4. L'angle \widehat{ATB} est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0; 50]$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = x + \frac{765}{x}$$

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle \widehat{ATB} est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle \widehat{ATB} à 0,01 radian près.

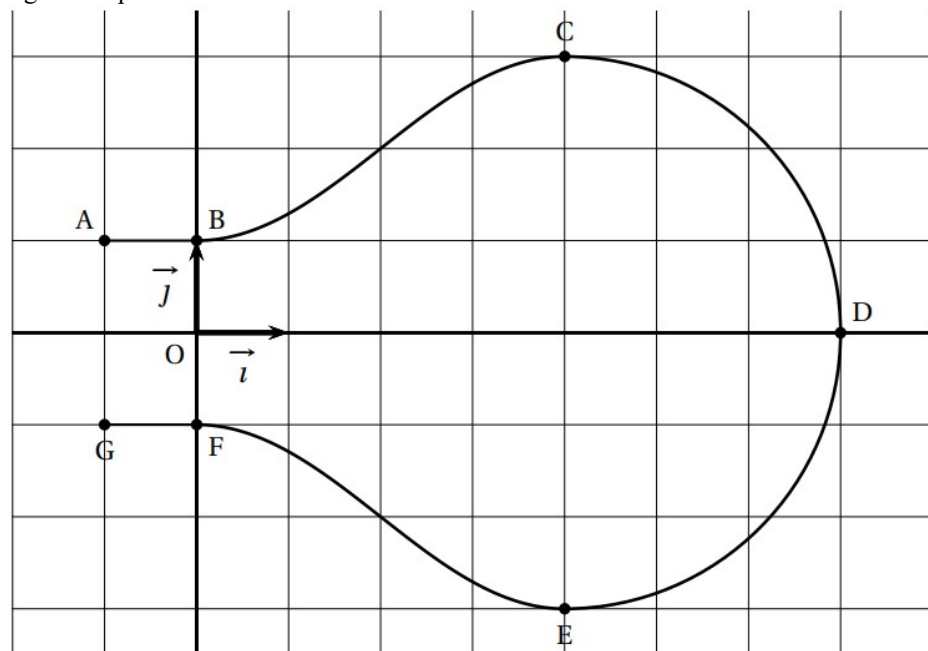
Exercice 14 corrigé disponible

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère les points :

$A(-1; 1)$, $B(0; 1)$, $C(4; 3)$, $D(7; 0)$, $E(4; -3)$, $F(0; -1)$ et $G(-1; -1)$.

On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-après :



- La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :
 - la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante h définie sur l'intervalle $[-1; 0]$ par $h(x) = 1$;
 - La portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(x) = a + b \sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$, où a , b et c sont des réels non nuls fixés et où le réel c appartient à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
 - la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre $[CE]$.
- La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

- a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f . Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 4]$, déterminer $f'(x)$.
 - b. On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel c .
- Déterminer les réels a et b .

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} = [-\pi; 0[\cup]0; \pi]$ par $f(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(x) - 1}$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- Etudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour sa représentation graphique ?
- Etudier $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
- Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]0; \pi]$. Dresser le tableau de variation de f sur $]0; \pi]$.
- Déterminer le point d'intersection A de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses et donner l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C} en A .
- Donner l'équation réduite de la tangente T' à \mathcal{C}_f au point d'abscisse π .
- Tracer les tangentes T et T' et la courbe représentative de f sur l'intervalle $]0; \pi]$. En déduire la courbe \mathcal{C}_f sur \mathcal{D} .

Exercice 16

- Déterminer les limites suivantes en justifiant soigneusement la réponse :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{x}} \quad b) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{5x+2}{2-x} \quad c) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{\sqrt{3}}{x^2-4} \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+7x+1}{x+3}}$$

- Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \cos\left(\frac{n+3}{n^2+1}\right)$.

Déterminer la limite de (u_n) en $+\infty$. (Justifier soigneusement la réponse.)

Exercice 17

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f : f(x) = (x+2)\cos(x) \qquad h : h(x) = \frac{3+\cos(x)}{3+\sin(x)}$$

Exercice 18

Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes

a) $\cos(3x) = 0$

b) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$