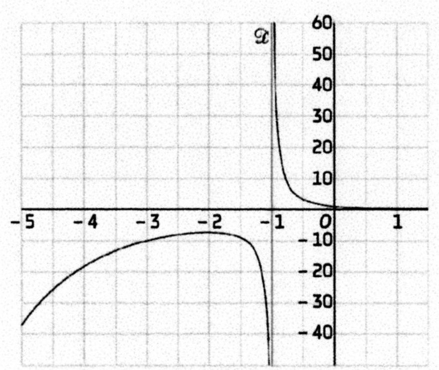
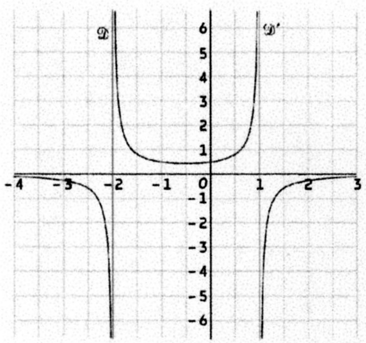
Limites de fonctions – Comportement asymptotique - Exercices

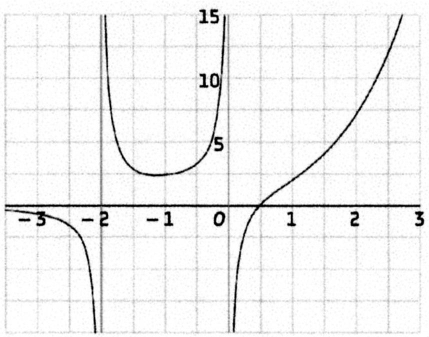
Exercice 1 corrigé disponible

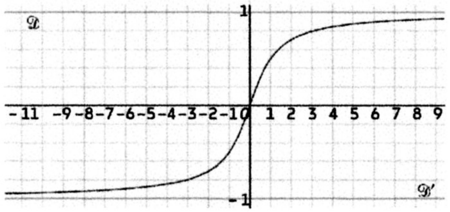
Dans chacun des cas suivants, on donne la représentation graphique d'une fonction *f* ainsi que les éventuelles asymptotes. En déduire :

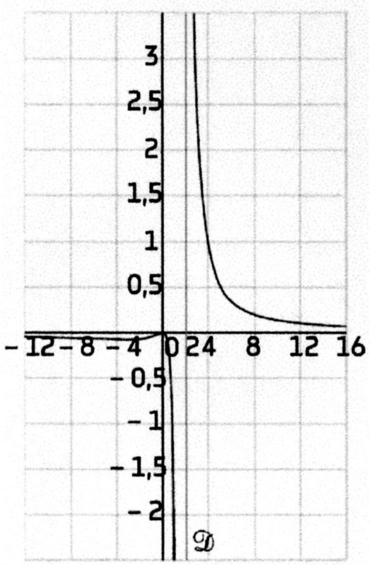
- le domaine de définition de *f*
- les limites aux bornes de l'ensemble de définition

1.


4.


2.


3.


5.


Exercice 2 corrigé disponible

Dans chacun des cas suivants, on donne certaines limites d'une fonction *f*.
Donner une interprétation graphique de chacune de ces limites.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x<-4}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x>-4}} f(x) = -\infty$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = -\infty$.
5. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$.

Exercice 3 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;;\; \lim_{x\to+\infty} g(x) \;;\; \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) \;;\; \lim_{x\to+\infty} (f\times g)(x)$$

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad g(x)=\dfrac{3}{x}$
2. $f(x)=x^2$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{x}$
3. $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ $\qquad g(x)=\dfrac{x}{1-x}$

Exercice 4 corrigé disponible

Etudier la limite à droite et à gauche de *a* pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{x^3}{1-2x}$; $\qquad a=\dfrac{1}{2}$
2. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$; $\qquad a=1$
3. $f(x)=\dfrac{4x-5}{1-x}$; $\qquad a=1$

Exercice 5 corrigé disponible

Déterminer les limites en -∞ et en +∞ des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{4x-1}{3x+1}$

2. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{3x^2+5}$

3. $f(x)=\dfrac{-4x+1}{x^2+1}$

4. $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{3x+1}$

Exercice 6 corrigé disponible

f est définie sur ℝ - $\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x-\sin x}{3x+1}$

1. Montrer que pour tout x ≥ 0,

$$\frac{2x-1}{3x+1}\leq f(x)\leq\frac{2x+1}{3x+1}$$

2. En déduire la limite de *f* en +∞.

Exercice 7 corrigé disponible

On définit f sur ℝ* par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$

1. Prouver que pour tout réel $x\geq 0$: $4x^2\leq 4x^2+x+1\leq(2x+1)^2$

2. En déduire que pour tout réel $x>0$: $2\leq f(x)\leq\dfrac{2x+1}{x}$.

3. Calculer la limite de *f* en +∞.

Exercice 8 corrigé disponible

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+3}}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-3x+2}{x+1}$

Exercice 9 corrigé disponible

On considère 3 fonctions *f, g et h*, définies sur ℝ, telles que pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x)\leq g(x)\leq h(x)$$

Si l'on sait que l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, alors on peut en déduire :

Réponse A : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Réponse B : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

Réponse C : $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$

Exercice 10 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes (On justifiera soigneusement) :

1. $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2-5x+6}{(3-x)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}3x-\sqrt{2x^2+3}$

4. $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{4-x}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+\sqrt{5x^2-1}$

6.

Soit g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4;3\}$ par $g(x)=\dfrac{2x-6}{-x^2+7x-12}$. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et 4^+.

Exercice 11 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

Vrai-Faux

Pour chacune des affirmation ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1) Si pour tout $x>0$, on a $f(x)\leqslant\dfrac{2}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2) Si pour tout $x>0$, on a $2+\dfrac{2}{x}\leqslant f(x)\leqslant 2+\dfrac{3}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

3) Si pour tout $x>0$, on a $1+\dfrac{3}{x}\leqslant f(x)\leqslant 2+\dfrac{3}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ avec $\ell\in[1;2]$.

4) Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$, $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas la droite d'équation $y=a$.

Exercice 12 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}$
5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}$

Exercice 13 corrigé disponible

Soit la fonction f définie sur]-∞,0[par :

$$f(x)=x^3-\cos x$$

1. Démontrer que l'on a pour tout x ≤0 :

$$f(x)\leq x^3+1$$

2. En déduire la limite de f en -∞.

Exercice 14 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{5-\dfrac{4}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right)^4$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+9-\dfrac{16}{x^2+4}}$

Exercice 15 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a. A quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?

   b. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

   c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 16 corrigé disponible

Determiner les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^5-6x^4+3x^2-12)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+x+3)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x+2}{3x-7}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2+2x}{3x^3-7}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 17 corrigé disponible

Vrai ou faux

a. Si pour tout réel x, $f(x)\geqslant x^2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b. Si pour tout réel x strictement positif, $f(x)\leqslant \dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

c. Si pour tout réel x strictement positif, $1\leqslant f(x)\leqslant x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

Exercice 18 corrigé disponible

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse (éventuellemnt par une définition ou un dessin) :

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors il existe un réel m tel que si $x>m$, alors $f(x)>10^4$.
2. Si f est croissante sur $[0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$, alors il existe un intervalle de la forme $]m;+\infty[$ tel que pour tout $x\in]m;+\infty[$, $f(x)<0$.
4. Si $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$, alors la droite d'équation $y=-1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 19 corrigé disponible

Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x+7\sqrt{x}+2}{-3+x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

Exercice 20 corrigé disponible

Déterminer :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+5}{4x+1}}$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+4}-x)$;
3. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$.

Exercice 21 corrigé disponible

La fonction f est définie sur ℝ - {2} par : $f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-3}{(x-2)^2}$

On note (C) la courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x≠2 :
$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{(x-2)^2}$$
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est asymptote la courbe (C).
4. Donner l'équation de la droite (D), autre asymptote à (C).

Exercice 22 corrigé disponible

Soit la fonction f définie sur ℝ - $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ par : $f(x)=\frac{2x^2+5x+11}{2x+3}$

C est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unité graphique : 1cm).

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} f(x)$. Donner une interprétation graphique.
2. Montrer que pour tout x ∈ℝ - $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$, on a : $f(x)=x+1+\frac{8}{2x+3}$

   Etudier alors la limite de f en + ∞ et en - ∞.
3. Soit D la droite d'équation y = x+1.

   Montrer que D est une asymptote oblique à C en +∞ et en -∞.

Exercice 23 corrigé disponible

Déterminer la limite de chacune des fonctions dans l'endroit indiqué.

$f_1(x)=\frac{x-4}{x^2+3x+2}$ en -2^-.

$f_2(x)=x^3-x^2\sqrt{x}$; en $+\infty$.

$f_3(x)=(-3x^2+5x-11)^{111}$; en $+\infty$

$f_4(x)=\frac{x^5+4x^2+3\pi}{5-x^2}$; en $-\infty$.

$f_5(x)=\frac{\sin((x-1)^2)}{x-1}$; en 1

$f_6(x)=\frac{\cos(3x)+x}{x+2}$; en $-\infty$

Exercice 24 corrigé disponible

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2-\cos x}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x\sin x$

Exercice 25 corrigé disponible

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x)=e^{-3x}$ b) $g(x)=e^x+e^{-x}$ c) $h(x)=x+e^x$ d) $k(x)=e^{2x}+e^x+1$

e) $l(x)=e^{3x}-e^x$ f) $m(x)=\frac{e^x+1}{e^x+2}$ g) $n(x)=\frac{-2e^x}{1+e^x}$

Exercice 26 corrigé disponible

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^2+2-e^x$ b) $g(x)=\frac{2e^x-x}{x^2}$ c) $h(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$

d) $l(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$ e) $k(x)=\frac{\sqrt{e^x+2}}{x}$ f) $t(x)=\frac{e^{2x}+x^2}{x^2+x-3}$

Exercice 27 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$

Préciser l'équation des éventuelles asymptotes

1. $f(x)=\frac{e^x}{x}$
2. $f(x)=e^x-x$
3. $f(x)=e^{2x}-xe^x+1$
4. $f(x)=x^4-2xe^x+e^2$
5. $f(x)=2x^3+3x-\frac{1}{x}$
6. $f(x)=(e^{2x}-1)(1-e^x)+\frac{1}{x}$
7. $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}-1}+e^x$
8. $f(x)=\frac{-2}{x^3+2x}+\sqrt{x^2}$

Exercice 28 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2x^2 - x + 3}{x - 1}$

2. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 4x}{-x^2 - 2x + 8}$

3. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$

4. $\lim\limits_{x \to 9^-} \dfrac{\sqrt{9 - x}}{x^2 - 81}$

Exercice 29 corrigé disponible

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x^2 + 5}$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 1}{x^2 + 5}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x(-x - 1)}{(x^2 + 2)(x + 3)}$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2}{(x + 2)(x - 5)}$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2 + 5x - 1}{4x^2 + x + 1}$

Exercice 30 corrigé disponible

Déterminer les limites des fonctions suivantes à l'endroit indiqué.

$f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x^2 - 3}{x - 3x^2}\right)$ sur $D = \mathbb{R}_+^*$. Limite en $+\infty$. | $g(x) = \dfrac{2x + 2}{3x^2 + 7x + 4}$. Limite en -1.

Exercice 31 corrigé disponible

On considère les fonctions f et g définies sur ℝ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer les limites de f et g aux bornes de leur domaine de définition

Exercice 32 corrigé disponible

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.

a. $f(x) = e^x - x$ **b.** $f(x) = (x + 1)e^x$

c. $f(x) = 4xe^{-x}$ **d.** $f(x) = x - e^{-x}$

e. $f(x) = \frac{e^x - 4}{e^x + 2}$ **f.** $f(x) = \frac{e^x}{x - 1}$

Exercice 33 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \left(\dfrac{1 - x^2}{x}\right)e^{-x}$

Répondre par vrai ou faux en justifiant sa réponse.

A. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

B. la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de f quand f tend vers $+\infty$.