

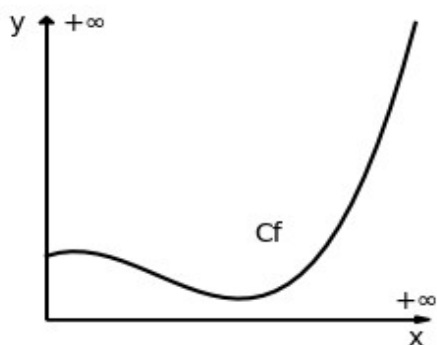
Limites de fonctions, comportement asymptotique – Fiche de cours

1. Limite infinie en l'infini

a. Définition

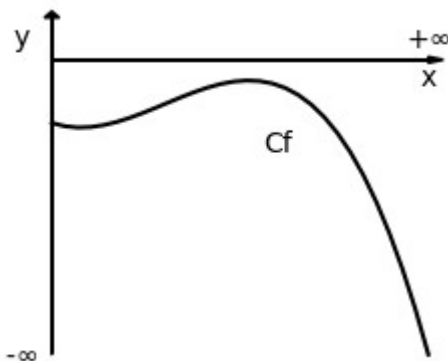
L'infini est un concept qui n'a pas d'équivalent physique ; il s'agit d'une limite

- limite en $+\infty$:



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \in]A; +\infty[$$

- limite en $-\infty$:



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \in]-\infty; A[$$

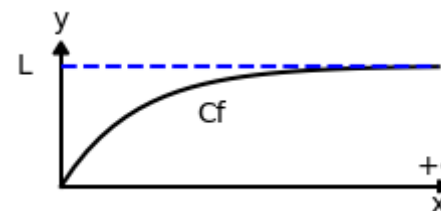
b. Limites de références

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n &= +\infty & - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} &= +\infty \\ - \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n &= \begin{cases} +\infty & n \text{ pair} \\ -\infty & n \text{ impair} \end{cases} & - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \end{aligned}$$

2. Limite réelle en l'infini

a. Définition



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall A > 0 \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \in]L - A; L + A[$$

b. Limites de références

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

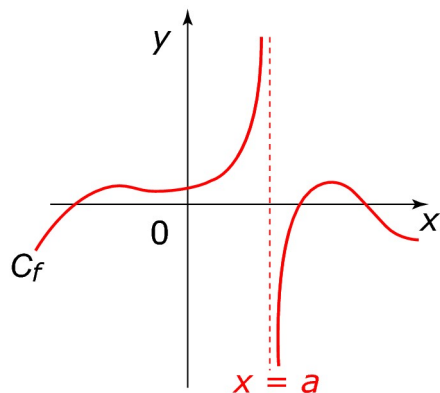
$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} &= 0 & - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} &= 0 \\ - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \end{aligned}$$

c. Asymptote horizontale

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $\pm\infty$

3. Limite infinie pour un réel

a. Mise en évidence



b. Limites de références

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n \text{ pair} \\ -\infty & n \text{ impair} \end{cases}$$

c. Asymptote verticale

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f

4. Croissances comparées

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot e^x = 0$$

5. Opérations sur les limites

a. Somme de deux fonctions

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

b. Produit de deux fonctions

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$(\pm\infty)$
$\lim f \cdot g$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

c. Quotient de deux fonctions

Limite d'un quotient									
Si f a pour limite en a	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	l	0
Si g a pour limite en a	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	0^+	0
Si $\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$\pm\infty$	FI

d. Limite d'une fonction rationnelle en l'infini

La limite d'un polynôme en l'infini est égale à la limite de ses monômes de plus haut degré en l'infini

e. Limite d'une composée de deux fonctions

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \text{ et } \lim_{u \rightarrow b} f(u) = c \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

6. Limites et inégalités

a. Comparaison de limites finies

$$\text{si } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} g(x) = L'$$

$$\text{alors } L \leq L'$$

b. Théorèmes de comparaison

- comparaison avec $-\infty$:

$$\text{si } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} g(x) = -\infty$$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} f(x) = -\infty$$

- comparaison avec $+\infty$:

$$\text{si } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} f(x) = +\infty$$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} g(x) = +\infty$$

c. Théorème d'encadrement dit « théorème des gendarmes »

$$\text{si } \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} g(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} h(x) = L$$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \text{ou} \\ x \rightarrow \pm\infty}} f(x) = L$$

7. Asymptote oblique

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ax + b \Leftrightarrow$ la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $\pm\infty$