Loi des grands nombres – Exercices

Exercice 1 **corrigé disponible**

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance x. Déterminer x tel que $P(X \geqslant 2) \leqslant \frac{1}{3}$.

Exercice 2 **corrigé disponible**

Soit X une variable aléatoire positive telle que $E(X) = a$ avec $a > 2$.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $P(X \geqslant a^n) \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 3 **corrigé disponible**

Un économiste affirme la chose suivante :

« Moins de 6,2 % de la population mondiale adulte est millionnaire ».

On donne les données suivantes :

- la richesse mondiale est de 278,1 billions de dollars (1 billion représente 1 000 milliards) ;
- la population adulte mondiale s'élève à 4,5 milliards.

Peut-on penser que l'économiste a raison ? Justifier.

Exercice 4

1. Calculer $P(|X - E(X)| \geqslant a)$, avec $a = 3$ et $V(X) = 2{,}5$.
2. Calculer $P(|X - E(X)| < a)$, avec $a = 11$ et $V(X) = 7$.
3. Calculer $P((X - E(X))^2 \geqslant a)$, avec $a = 16$ et $V(X) = 4$.

Exercice 5

Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p lorsqu'elle compte le nombre d'essais avant le premier succès dans une répétition d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Soient n un entier naturel non nul et Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{n}$.

1. Donner alors l'espérance et la variance de Y.

2. Montrer que $P(Y \geqslant n^2) \leqslant \frac{1}{n}$.

3. Montrer que $P(|Y - n| \geqslant n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 6 **corrigé disponible**

Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le numéro obtenu sur le dé est 5 et 0 sinon

On lance n fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
On note M_n le nombre moyen de 5 obtenus.
À l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer la valeur minimale de n pour respecter les conditions de l'exercice.

1. $a = 0{,}02$ et $P(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant 0{,}05$.

2. Vérifier le résultat avec un programme en langage Python.

Exercice 7

On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge, et 0 sinon, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X.

1. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$, puis écrire l'inégalité de concentration relative à M_n.
2. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Exercice 8

On lance 3 600 fois une pièce de monnaie non truquée.
Soit X la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de Pile obtenus.

1. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable X.
2. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.

Exercice 9

Amir distribue tous les jours des prospectus à la sortie du métro.
Les variables aléatoires X_i donnant le nombre de prospectus distribués le i-ième jour sont indépendantes et de même loi d'espérance 250 et de variance 100.

Au bout de combien de jours peut-il être sûr au risque de 5 % d'avoir distribué en moyenne entre 245 et 255 prospectus par jour ?

Exercice 10

On lance une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,6.

1) On lance n fois cette pièce et on appelle X_i la variable aléatoire donnant le nombre de PILE obtenus au i-ième lancer.
   a) Justifier que X_i suit une loi de Bernoulli.
   b) Déterminer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
2) On cherche à déterminer un nombre de lancers à partir duquel on est sûr au seuil de 95 % qu'il y a plus de PILE que de FACE.
   a) On appelle M_n la variable aléatoire donnant la moyenne des n premiers X_i.
   Quel est le plus grand intervalle I de la forme $]0,6-\delta\ ;\ 0,6+\delta[$ tel que $M_n \in$ I implique qu'il y ait eu plus de PILE que de FACE ?
   b) À l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer à partir de combien de lancers on peut être sûr au seuil de 95 % que $M_n \in$ I. On appellera n_0 ce nombre de lancers.
   c) En utilisant la loi binomiale, calculer la probabilité qu'il y ait plus de PILE que de FACE quand on lance n_0 fois cette pièce. Commenter.

Exercice 11

On considère une usine fabriquant des montres à aiguilles sans trotteuse. Les deux aiguilles sont fabriquées indépendamment.
Les variables aléatoires donnant la masse de l'aiguille en grammes sont :

- X pour les heures d'espérance 3 et d'écart-type 0,15 ;
- Y pour les minutes d'espérance 2 et d'écart-type 0,1.

1) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z donnant la masse totale des deux aiguilles.
2) Pour que la montre soit bien équilibrée, la masse des deux aiguilles doit être comprise entre 4,4 g et 5,6 g.
   Que peut-on dire de la probabilité que ce soit le cas ?