

# Primitives et équations différentielles – Exercices – Devoirs

## Exercice 1 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

- $x \mapsto -3$
- $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$
- $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$
- $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 8$

## Exercice 2 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

- $x \mapsto e^x - 2e^{-x}$
- $x \mapsto \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$
- $x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$
- $x \mapsto \frac{9x^2 - 3}{(x^3 - x)^2}$
- $f(x) = (4 - x) \cdot (x^2 - 8x)^5$

## Exercice 3 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

- $y' - \frac{1}{2}y = 0$
- $2y' - 3y = 8y + 4y'$
- $5y' + 3y = 0$
- $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$

## Exercice 4 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer la solution  $F$  de l'équation différentielle donnée qui respecte la condition précisée.

- $y' + \sqrt{2}y = 0$  avec  $F(\sqrt{2}) = 1$ .
- $2y' - 3y = 2y + 3y'$  avec  $F(0) = 5$ .
- $\frac{1}{2}y' + y = \frac{1}{2}y - y'$  avec  $F(3) = \frac{1}{e}$ .

## Exercice 5 corrigé disponible

Après avoir déterminé une fonction affine  $\varphi$  solution particulière de l'équation différentielle (E) :  $2y' - y = 2x$ , déterminer la solution  $F$  de (E) telle que  $F(0) = -2$ .

## Exercice 6

Après avoir déterminé une fonction polynôme du second degré  $\varphi$  solution particulière de l'équation différentielle (E) :  $y' + 2y = 4x^2 - 2x + 1$ , déterminer la solution  $F$  de (E) telle que  $F(0) = 4$ .

### Exercice 7

Après avoir déterminé une fonction  $\varphi$  de la forme  $x \mapsto mxe^{2x}$  (avec  $m \in \mathbb{R}$ ) solution particulière de l'équation différentielle (E) :  $y' - 2y = 2e^{2x}$ , déterminer la solution F de (E) telle que  $F(0) = -1$ .

### Exercice 8

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1.  $f: x \mapsto -\frac{1}{(x+2)^2}$  ;  $I = ]-\infty ; -2[$

2.  $f: x \mapsto \frac{2}{(x+3)^2}$  ;  $I = ]-3 ; +\infty[$

### Exercice 9

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1.  $f: x \mapsto -xe^{x^2-1}$  ;  $I = \mathbb{R}$       2.  $f: x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$  ;  $I = \mathbb{R}$

### Exercice 10

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1.  $y' = e^{2x} + 2e^{-\frac{x}{2}}$  ;  $I = \mathbb{R}$  ;  $x_0 = 0$  ;  $y_0 = \frac{1}{2}$

2.  $y' = 2x(x^2+1)^3$  ;  $I = \mathbb{R}$  ;  $x_0 = 0$  ;  $y_0 = \frac{3}{4}$

### Exercice 11 corrigé disponible

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1.  $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$  ;  $I = ]0 ; +\infty[$  ;  $x_0 = 2$  ;  $y_0 = -\sqrt{2}$

2.  $y' = 3e^x$  ;  $I = \mathbb{R}$  ;  $x_0 = 1$  ;  $y_0 = e$

### Exercice 12 corrigé disponible

$f$  et  $F$  sont deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $k$  est un réel.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. Si  $F$  est positive et dérivable sur  $I$  avec  $F' = f$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ .

2. Si  $F$  est décroissante et dérivable sur  $I$  avec  $F' = f$ , alors  $f$  est négative sur  $I$ .

3. Si  $F' = f$ , alors  $f$  est une primitive de  $F$  sur  $I$ .

4. Si  $F' = f$ , alors  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

5. Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors  $F + k$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

### Exercice 13

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

1. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $x \in I$  :

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}.$$

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle  $y' = f$ .

### Exercice 14

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]-2 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 2}{(x+2)^2}.$$

1. Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x \in I$  :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}.$$

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle  $y' = f$ .

### Exercice 15

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $2y' + 3y = 0$  et  $y(2) = 1$ .    2.  $5y' - 2y = 0$  et  $y(5) = e$ .

### Exercice 16

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $\sqrt{3}y' + y = 0$  et  $y(\sqrt{3}) = \frac{1}{e^3}$ .

2.  $y' - \pi^2 y = 0$  et  $y\left(\frac{1}{\pi}\right) = \pi$ .

### Exercice 17

1.  $2y' + y = x + 1$  avec  $\varphi(x) = mx + p$ .

2.  $y' + 3y = 2x - 1$  avec  $\varphi(x) = mx + p$ .

3.  $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$  avec  $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ .

4.  $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$  avec  $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ .

### Exercice 18 corrigé disponible

1) Résoudre l'équation différentielle  $2y' + y = 0$  ( $E$ ) dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

2) On considère l'équation différentielle

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (E')$$

a. Déterminer deux réels  $m$  et  $p$  tels que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$$

soit une solution de ( $E'$ ).

b. Soit  $g$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $g$  est solution de ( $E'$ ) si et seulement si  $g - f$  est solution de ( $E$ ).

Résoudre l'équation ( $E'$ ).

3) Etudier les variations de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$$

4) Déterminer les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de  $h$ .

5) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $h$  et  $\Gamma$  celle de la fonction  $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ .

a. Etudier les positions relatives de  $\mathcal{C}$  et de  $\Gamma$ .

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.



## Exercice 19 corrigé disponible

1) On suppose connu le résultat suivant : la fonction  $x \mapsto e^x$  est l'unique fonction  $\phi$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\phi' = \phi$  et  $\phi(0) = 1$ . On considère un réel  $a$ .

a. Montrer que la fonction  $f: x \mapsto e^{ax}$  définie sur  $\mathbb{R}$  est solution de l'équation différentielle  $y' = ay$ .

b. On considère une fonction  $g$  solution de l'équation différentielle  $y' = ay$  et on note  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = g(x)e^{-ax}$ . Montrer que  $h$  est constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de  $y' = ay$ .

2) On considère l'équation différentielle  $(E) : y' = 2y + \cos x$ .

a. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $f_0$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$  soit solution de  $(E)$ .

b. Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : y' = 2y$ .

c. Démontrer que  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f - f_0$  est solution de  $(E_0)$ .

d. En déduire les solutions de  $(E)$ .

e. Déterminer la solution  $k$  de  $(E)$  vérifiant  $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

## Exercice 20 corrigé disponible

On considère les deux équations différentielles définies sur  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  :

$$(E) \quad y' + (1 + \tan x)y = \cos x \qquad (E_0) \quad y' + y = 1$$

1) Déterminer les solutions de  $(E_0)$ .

2) On considère deux fonctions  $f$  et  $g$  dérivables sur  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  telles que  $f(x) = g(x) \cos x$ .

Démontrer que  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $g$  est solution de  $(E_0)$ .

3) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  telle que  $f(0) = 0$ .

## Exercice 21

[1] On considère l'équation différentielle  $\frac{y'}{3} + y = x^3$  (E).

Démontrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$  est une solution particulière de (E).

[2] On considère l'équation différentielle  $y' + 5y = 9e^{-2x}$  (E).

Démontrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3e^{-2x}$  est une solution particulière de (E).

[3] Résoudre l'équation différentielle  $y' = 3y$ .

[4] Résoudre l'équation différentielle  $2y' = -y$ .

[5] Résoudre l'équation différentielle  $2y' = 5y$ .

[6] Déterminer la solution  $f$  de l'équation différentielle  $y' + 2y = 0$  telle que  $f(0) = 1$ .

[7] Déterminer la solution  $f$  de l'équation différentielle  $y' = 7y$  telle que  $f(1) = e$ .

## Exercice 22

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)  $y' = 3y$

4)  $y + 3y' = 2$

2)  $y' + 2y = 0$

5)  $2y + 3y' - 1 = 0$

3)  $y' = 2y + 1$

6)  $2y' = y - 1$

## Exercice 23

Résoudre les équations différentielles proposées avec la condition initiale proposée :

1)  $y = -5y'$  avec  $f(-2) = 1$

2)  $y + 2y' = 0$  avec  $f'(-2) = \frac{1}{2}$

## Exercice 24

Soit l'équation différentielle (E) :  $y' + 3y = e^{2x}$ .

1) Déterminer le réel  $a$  tel que la fonction  $p$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $p(x) = ae^{2x}$  soit une solution particulière de (E).

2) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation (E).

3) Déterminer la solution de (E) vérifiant  $y(0) = 1$ .

### Exercice 25 corrigé disponible

Donner une primitive sur l'intervalle  $I$  de chacune des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{3}{x-4}$   $I = ]4 ; +\infty[$

2.  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$   $I = ]0 ; +\infty[$

3.  $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 1}$   $I = ]-\pi ; \pi[$

4.  $f(x) = \tan x$   $I = ]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

5.  $f(x) = \frac{16x+4}{4x^2+2x+1}$   $I = \mathbb{R}$

### Exercice 26 corrigé disponible

Soit  $f(x) = \cos^3 x$

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$ .

2. En déduire la primitive  $F$  telle que  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

### Exercice 27 corrigé disponible

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{2x-7}{x^2-2x-3}$$

Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $x$  élément de l'ensemble de  $f$  :

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$$

En déduire une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]3 ; +\infty[$ .

### Exercice 28

On considère deux fonctions  $f$  et  $F$  définies sur  $I$ .

Dans chaque cas, montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

1.  $F(x) = (x-1)(-x+4)$   $f(x) = -2x+5$   $I = \mathbb{R}$

2.  $F(x) = (4x+1)e^{-x^2}$   $f(x) = (-8x^2-2x+4)e^{-x^2}$   $I = \mathbb{R}$

3.  $F(x) = \frac{3x+1}{x-5}$   $f(x) = \frac{-16}{(x-5)^2}$   $I = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

4.  $F(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+2}}$   $f(x) = \sqrt{5x+2}$   $I = ]-\frac{2}{5} ; +\infty[$

### Exercice 29

Donner une primitive sur l'intervalle  $I$  de chacune des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{3}{7}x + \frac{1}{2}$   $I = \mathbb{R}$

2.  $f(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x}}$   $I = ]\frac{1}{3} ; +\infty[$

3.  $f(x) = (2x+1)(x^2+x-7)$   $I = \mathbb{R}$

4.  $f(x) = (3x-1)^6$   $I = \mathbb{R}$

5.  $f(x) = \frac{4}{(2x-1)^4}$   $I = ]\frac{1}{2} ; +\infty[$

6.  $f(x) = 6xe^{x^2+1}$   $I = \mathbb{R}$

### Exercice 30

Donner une primitive sur l'intervalle  $I$  de chacune des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$   $I = \mathbb{R}$

2.  $f(x) = 4\cos(2x+1)$   $I = \mathbb{R}$

3.  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$   $I = ]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

4.  $f(x) = \cos x \sin^4 x$   $I = \mathbb{R}$

5.  $f(x) = \sin^2 x$   $I = \mathbb{R}$

### Exercice 31

1) Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer la primitive.

a)  $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 3}$ ,  $I = \mathbb{R}$

b)  $g(x) = \frac{5}{(2x-1)^3}$ ,  $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

c)  $h(x) = \frac{1}{x} \ln x$ ,  $I = ]0; +\infty$

2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

a) Montrer que :  $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

b) En déduire une primitive de  $f$  sur  $]1; +\infty[$

### Exercice 32

Soit  $(E)$  l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$  :

$$y' = 2y - 3y^2$$

On cherche une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$u(0) = \frac{1}{4}$$

1. Soit  $u$  une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

On définit la fonction  $v$  sur  $\mathbb{R}$  par  $v = \frac{1}{u}$ .

Démontrer l'équivalence des deux affirmations suivantes :

(i)  $u$  est solution de  $(E)$  et  $u(0) = \frac{1}{4}$ .

(ii)  $v$  est solution de  $(E') : y' = -2y + 3$  et  $v(0) = 4$ .

2. Résoudre  $(E')$  et déterminer  $v$ .

3. En déduire la résolution de  $(E)$  et la fonction  $u$ .