Primitives et équations différentielles – Fiche de cours

1. Equation différentielle y'=f

a. Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I avec F'=f

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle (à une constante d'intégration près)

b. Primitive des fonctions de références

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

c. Opération des primitives

Fonction	Primitive	Intervalle
$f=u+v$	$F=U+V$	$D_u \cap D_v$
$f=u'.u^n$	$F=\frac{u^{n+1}}{n+1}$	D_u
$f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F=2\sqrt{u}$	$D_u \cap u>0$
$f=\frac{u'}{u^2}$	$F=-\frac{1}{u}$	$D_u \cap u \neq 0$
$f=u'.e^u$	$F=e^u$	D_u
$f=\frac{u'}{u}$	$F=\ln\|u\|$	$D_u \cap u \neq 0$
$f=u'\sin u$	$F=-\cos u$	D_u
$f=u'\cos u$	$F=\sin u$	D_u

2. Equation différentielle y'=ay

L'équation différentielle $y'=ay$ est appelée équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sans second membre.
Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$y(x)=Ce^{ax} \quad C \in \mathbb{R}$$

Pour résoudre C on utilise une condition

3. Equation différentielle y'=ay+b a≠0

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont de la forme :

$$y(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a} \quad C \in \mathbb{R}$$

Pour résoudre C on utilise une condition

4. Equation différentielle y'=ay+f   a≠0

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+f(x)$ sont de la forme :

$$y(x)=Ce^{ax}+\phi(x) \quad C\in\mathbb{R}$$

$\phi(x)$ est une fonction de même nature que $f(x)$

Pour résoudre C on utilise une condition

5. Principe de résolution des équations différentielles

Solution générale = Solution homogène + solution particulière