Relation des ensembles – Logique – Fiche de cours

Relation des ensembles

1. Le symbole appartenance $\in$ ou $\notin$

Le symbole appartenance $\in$ ou $\notin$ est une relation entre un élément et un ensemble

Exemples :

- $4 \in \mathbb{R}$
- $M(1;3) \notin d : y = 2x - 1$

2. Le symbole inclusion $\subset$ ou $\not\subset$

Le symbole inclusion $\subset$ ou $\not\subset$ est une relation entre un sous-ensemble et un ensemble

Exemples :

- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- la droite $(AB) \not\subset$ sur le plan (ACD)

3. Le symbole intersection $\cap$

Le symbole intersection $\cap$ désigne les éléments communs à deux ensembles.

Exemple : $A \cap B$

4. Le symbole union $\cup$

Le symbole union $\cup$ désigne les éléments appartenant à l'un, à l'autre ou à deux ensembles.

Exemple : $A \cup B$

La logique

1. Proposition logique

Une proposition logique est une affirmation formée par des mots et des symboles à laquelle on veut attribuer la valeur « vrai » ou la valeur « faux ».

Exemple : « 2 » est un nombre pair : proposition vraie
« 5 » est un diviseur de 4 : proposition fausse

2. Négation d'une proposition logique

La négation consiste à affirmer le contraire d'une proposition logique (nier son existence).

3. Connecteurs logiques « et » « ou »

- connecteur logique « et »

Soit P et Q deux propositions ; la proposition « P et Q » est vraie si les 2 propositions P et Q sont vraies simultanément.

- connecteur logique « ou »

Soit P et Q deux propositions ; la proposition « P ou Q » est vraie si au moins l'une des 2 propositions P et Q sont vraies.

4. Négation de (P et Q) et de (P ou Q)

- négation de (P et Q)

La négation de (P et Q) = négation de (P) ou négation de (Q)

- négation de (P ou Q)

La négation de (P ou Q) = négation de (P) et négation de (Q)

5. Condition nécessaire et suffisante

Lorsque la proposition P $\Rightarrow$ Q est vraie
P est la condition nécessaire pour Q
Q est une condition suffisante pour P

6. Implication, réciproque, équivalence

- implication

La proposition « si P alors Q » est appelée implication

On peut utiliser la notation : $P \Rightarrow Q$

- réciproque

La proposition réciproque de « si P alors Q » est « si Q alors P »

On peut utiliser la notation : $Q \Rightarrow P$

- équivalence

La proposition P si et seulement si Q (ou P est équivalent à Q) est la proposition : « si $P \Rightarrow Q$ » et « si $Q \Rightarrow P$ »

On peut utiliser la notation $P \Leftrightarrow Q$ ou l'expression P si et seulement si Q

7. Les quantificateurs

- universel

Le quantificateur universel est « quelque que soit, pour tout » noté $\forall$

- existentiel

Le quantificateur existentiel est « il existe » noté $\exists$

8. Les raisonnements

- raisonnement direct
- implication

Pour établir si « $P \Rightarrow Q$ » est vraie on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie

- réciproque

Pour établir si « $Q \Rightarrow P$ » est vraie on suppose que Q est vraie et on démontre que P est vraie

- équivalence

Pour établir si « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie on doit démontrer $P \Rightarrow Q$ est vraie et $Q \Rightarrow P$ est vraie.

- disjonction des cas

On démontre une propriété en séparant et en étudiant tous les cas.

Exemple : la parité, étude des cas d'une valeur absolue

- contraposée

On peut montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie avec un raisonnement par contraposée : « si non (Q) $\Rightarrow$ non (P) » est vraie.

- raisonnement par l'absurde

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie on suppose que $P \Rightarrow$ non(Q) est vraie et on recherche l'existence d'au moins une contradiction.

- raisonnement par récurrence (terminale)

Pour démontrer qu'une proposition P_n est vraie $\forall\ n \geq n_0$

Initialisation : on démontre que Pn_0 est vraie

Hérédité : on démontre que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie