Suites numériques – Fiche de cours

1. Le raisonnement par récurrence

Soit une propriété (P_n) définie sur $\mathbb{N}$ ou un sous-ensemble de $\mathbb{N}$

- Intialisation : on étudie si la propriété est vraie au rang initial
- Hérédité : on suppose qu'il existe un entier $n \geq n_0$ tel que P_n soit vraie et l'on démontre que P_{n+1} l'est aussi
- Conclusion : d'après le principe du raisonnement par récurrence la propriété (P_n) est vraie pour tout entier naturel (ou un sous ensemble de $\mathbb{N}$)

2. Inégalité de Bernouilli

$$\forall a > 0 \quad (1+a)^n \geq 1+na$$

3. Limite d'une suite

3.1 Limite finie

Une suite (u_n) admet une limite L si l'on a : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$

Une suite (u_n) a pour limite L si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel :

$$\forall a > 0\, u_n \in]L-a\,;L+a[$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

3.2 Limite infinie

Une suite (u_n) a pour limite +∞ si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel :

$$\forall A > 0 \quad u_n \in]A\,;+\infty[$$

Une suite (u_n) a pour limite -∞ si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel :

$$\forall A > 0 \quad u_n \in]-\infty\,;A[$$

Lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ on dit que (u_n) diverge

$$\lim_{x\to\infty} n = \lim_{x\to\infty} n^2 = \lim_{x\to\infty} n^3 = \lim_{x\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

3.3 Limites par encadrement ou comparaison

a. Théorème d'encadrement (dit des gendarmes)

Pour $v_n \leq u_n \leq w_n$ si $\lim\limits_{x\to\infty} v_n = L$ et $\lim\limits_{x\to\infty} w_n = L$ alors $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = L$

b. Théorèmes de comparaison

Pour $u_n \geq v_n$ si $\lim\limits_{x\to\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = +\infty$

Pour $u_n \leq w_n$ si $\lim\limits_{x\to\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = -\infty$

3.4 Opérations sur les limites

Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞*	F. ind.	∞*

Limite d'un quotient

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 (1)	0	∞	ℓ'	∞
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞^*	F. ind.	0	∞^*	F. ind.

3.5 Limites des suites géométriques

Théorème 3 : Soit q un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas

3.6 Convergence des suites

Définition 4 : On dit que la suite (u_n) est majorée si, et seulement si, il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$$

On dit que la suite(u_n) est minorée si, et seulement si, il existe un réel m tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$$

Si (u_n) est majorée et minorée, on dit que la suite est bornée.

Théorème 4 : **Divergence**

- Si une suite (u_n) est **croissante et non majorée** alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et non minorée** alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Théorème 5 : **Convergence**

- Si une suite (u_n) est **croissante et majorée** alors la suite (u_n) converge.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et minorée** alors la suite (u_n) converge.