Suites numériques – Fiche de cours

1. Le raisonnement par récurrence

Définition 1 : Soit une propriété (P_n) définie sur $\mathbb{N}$.

- Si la propriété est *initialisée* à partir du rang 0 ou n_0
- et si la propriété est *héréditaire* à partir du rang 0 ou n_0 (c'est à dire que pour tout $n \geqslant 0$ ou $n \geqslant n_0$ alors $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Alors : la propriété est vraie à partir du rang 0 ou n_0

2. Inégalité de Bernouilli

Théorème 1 : Soit un réel a strictement positif. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$$

3. Limite d'une suite

3.1 Limite finie

Définition 2 : On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et l'on dit que la suite (u_n) **converge** vers ℓ

Une suite (u_n) a pour limite L si $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\forall\, a>0 \quad u_n \in \,]L-a\,;\,L+a[$

Conséquence Les suites définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{1}{n^2}, \quad w_n = \frac{1}{n^3}, \quad t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{ont pour limite } 0$$

3.2 Limite infinie

Définition 3 : On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

On dit que la suite **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\forall\, A>0 \quad u_n \in \,]A\,;+\infty[$
Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ si $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\forall\, A>0 \quad u_n \in \,]-\infty\,;A[$

Conséquence Les suites définies pour tout entier naturel par :

$$u_n = n, \quad v_n = n^2, \quad w_n = n^3, \quad t_n = \sqrt{n}, \quad \text{ont pour limite } +\infty$$

3.3 Limites par comparaison et par encadrement

Théorème 2 : Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Si à partir d'un certain rang, on a :

1) **Théorème d'encadrement ou "des gendarmes"**

$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

2) **Théorème de comparaison**

- $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- $u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞*	F. ind.	∞*

Limite d'un quotient

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 (1)	0	∞	ℓ'	∞
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞*	F. ind.	0	∞*	F. ind.

3.5 Limites des suites géométriques

Théorème 3 : Soit q un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas

3.6 Convergence des suites

Définition 4 : On dit que la suite (u_n) est majorée si, et seulement si, il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$$

On dit que la suite(u_n) est minorée si, et seulement si, il existe un réel m tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$$

Si (u_n) est majorée et minorée, on dit que la suite est bornée.

3.4 Opérations sur les limites

Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

Théorème 4 : **Divergence**

- Si une suite (u_n) est **croissante et non majorée** alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et non minorée** alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Théorème 5 : **Convergence**

- Si une suite (u_n) est **croissante et majorée** alors la suite (u_n) converge.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et minorée** alors la suite (u_n) converge.