Sommes de variables aléatoires – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Voici trois lois de probabilités et trois couples d'espérance et d'écart type, associez-les sans justification.

Loi de probabilité		Espérance Écart type	
A	$\begin{array}{c\|c\|c} x_i & 8 & 14 \\ \hline p(X=x_i) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$	E	$E(X)=11 \quad \sigma(X)\approx 1,73$
B	$\begin{array}{c\|c\|c} x_i & 8 & 12 \\ \hline p(X=x_i) & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$	F	$E(X)=10 \quad \sigma(X)\approx 0,82$
C	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} x_i & 4 & 10 & 16 \\ \hline p(X=x_i) & \frac{1}{100} & \frac{98}{100} & \frac{1}{100} \end{array}$	G	$E(X)=10 \quad \sigma(X)\approx 2,83$

Exercice 2 corrigé disponible

On considère deux dés fantaisistes dont les faces sont marquées de la façon suivante :

- le premier dé : 1, 2, 2, 3, 4, 4
- le deuxième dé : 1, 3, 4, 5, 6, 8

Soit X la variable aléatoire qui indique le numéro du premier dé

Soit Y la variable aléatoire qui indique le numéro du deuxième dé

Soit Z la variable aléatoire définie par Z=X+Y

1. A l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer la loi de probabilité de (X,Y) et donner la valeur de Z.
2. Donner la loi de probabilité de Z=X+Y
3. Calculer E(X), E(Y), E(Z), V(X), V(Y) et V(Z)
4. Calculer $E(3X-2Y)$; $V(3X-2Y)$; $\sigma(3X-2Y)$

Exercice 3 corrigé disponible

Soit X et Y deux variables aléatoires et indépendantes dont les lois de probabilités sont données dans les tableaux ci-dessous :

x_i	-2	0	3	4
$p(X=x_i)$	$0,4$	$0,2$	$0,3$	$0,1$

y_i	-5	10	20
$p(Y=y_i)$	$0,35$	$0,45$	$0,1$

1) Calculer $E(X+Y)$.

2) $V(X+Y)$.

3) Déterminer une valeur approchée de $\sigma(X+Y)$ à 10^{-2} près.

Exercice 4 corrigé disponible

Une urne contient une boule rouge et n boules blanches.

On tire **successivement et avec remise** deux boules de l'urne.

1. Exprimer en fonction de n la probabilité des événements suivants :
   M : « Les deux boules sont de la même couleur »
   N : « Les deux boules sont de couleur différente »
2. On considère le jeu suivant : le joueur perd $(n+1)^2$ euros si M est réalisé et gagne $2(n+1)^2$ euros sinon. On appelle X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Démontrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$.

   Pour les questions suivantes toute trace de recherche et de raisonnement seront pris en compte.

   (c) Pour quelles valeurs de n le jeu est favorable au joueur ?
   (d) Si on laisse choisir au joueur le nombre de boules blanches, que doit-il répondre ?

On suppose que n=2 boules blanches

3. Calculer E(X) et V(X)
4. On considère les événements suivants :
   M : tirer simultanément 2 boules de la même couleur
   N : tirer simultanément 2 boules de couleur différentes
   Déterminer P(M) et P(N)

Soit Y la variable aléatoire qui est égale au gain algébrique (positif ou négatif du joueur) . Si M est réalisé le joueur perd 5 euros, si N est réalisé le joueur gagne 10 euros

5. Calculer E(Y) et V(Y)
6. Calculer E(X+Y) , V(X+Y), E(5X+2Y) et V(5X+2Y)

Exercice 5 corrigé disponible

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de $15 km.h^{-1}$.
Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$.
Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps en minute mis par l'élève pour aller au lycée.

1) Déterminer la loi de probabilités de X.
2) Exprimer T en fonction de X.
3) Déterminer $E(T)$ et interpréter ce résultat.
4) L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
   a. Peut-il espérer être à l'heure ?
   b. Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

Exercice 6 corrigé disponible

Une agence de location de voiture dispose de trois voitures qu'elle loue à la journée.

On admet que la demande journalière de véhicules est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,22	0,37	0,24	0,10	0,05	0,02

On suppose que tous les véhicules sont en état de marche. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de véhicules loués à la journée.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Calculer l'espérance et la variance de Y.

3. Le prix de location par jour et par voiture est de 50 €. Les frais supportés par l'agence sont en moyenne de 10 € par voiture et par jour, que le véhicule soit loué ou non, et de 10 € par véhicule loué.

a. Exprimer la variable aléatoire B égale au bénéfice journalier en fonction de Y.

b. Calculer l'espérance et la variance de B.

Exercice 7 corrigé disponible

Un jeu consiste à lancer un dé cubique bien équilibré trois fois successivement, puis une pièce de monnaie non truquée cinq fois successivement.
On gagne autant d'euros que le numéro inscrit sur le dé, et un euro quand on obtient pile.
Pour tout entier k compris entre 1 et 3, on note X_k la variable aléatoire qui, au k-ième lancer du dé, associe le gain obtenu et, pour tout entier i compris entre 1 et 5, Y_i la variable aléatoire qui, au i-ième lancer de la pièce, associe le gain obtenu.

1. Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.

2. Calculer $E(Y_i)$ et $V(Y_i)$.

3. Soit Z la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur.

a. Exprimer Z en fonction des variables X_k et Y_i.

b. En déduire l'espérance et la variance de Z.

Exercice 8 corrigé disponible

Soit X une variable aléatoire d'espérance 5 et d'écart-type 2. Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n (respectivement M_n) la variable aléatoire somme (resp. moyenne) d'un échantillon de taille n de X.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. L'espérance de S_{10} est 50.

b. La variance de M_{100} est 0,2.

c. L'écart-type de S_{400} est 40.

d. L'espérance de $M_{50} - 50$ est 0.

Exercice 9 corrigé disponible

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un univers Ω.

À partir des informations données à chaque ligne, recopier et compléter le tableau ci-dessous.

$V(X)$	$V(Y)$	$V(X+Y)$	$V(3X-Y)$
1,4		3	
2,8			39,4
		11,4	53,8

Exercice 10 corrigé disponible

On dispose d'un jeu de 52 cartes comme ci-dessus et on prélève une carte au hasard dans le paquet.

On s'intéresse à deux aspects de la carte.

- Sa couleur :
  - si la carte est un cœur, on gagne 10 points ;
  - si la carte est un trèfle, on gagne 2 points ;
  - dans les autres cas, on perd 15 points ;
- Sa valeur :
  - si la carte est une figure (valet, dame ou roi), on gagne 5 points ;
  - si la carte est un as, on gagne 2 points ;
  - si la carte est un 2 ou un 10, on gagne 1 point ;
  - si la carte est un 5, on ne gagne pas de point ;
  - dans les autres cas, on perd 1 point.

Soit Z la variable aléatoire correspondant au nombre de points remportés au total.

1. On note X et Y les variables aléatoires correspondant au nombre de points obtenus en regardant respectivement la couleur et la valeur de la carte.

a. Exprimer Z en fonction de X et Y.

b. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y.

c. En déduire $E(Z)$ puis $\sigma(Z)$. On arrondira à 10^{-4} près.

2. On joue cinq fois de suite à ce jeu, en remettant systématiquement la carte obtenue dans le paquet et en mélangeant de nouveau les cartes.
Pour tout entier $k \in \{1 ; \dots ; 5\}$, on note Z_k la variable aléatoire correspondant au nombre de points obtenus au k^e tirage.
Soit S la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus à l'issue de la partie.

a. Exprimer S en fonction des variables Z_k.

b. Calculer $E(S)$ puis interpréter le résultat obtenu.
Calculer $\sigma(S)$. On arrondira à 10^{-4} près.

c. On pose enfin la variable aléatoire $M = \dfrac{Z_1 + \dots + Z_5}{5}$.
À quoi la variable aléatoire M correspond-elle ?
Calculer $\sigma(M)$. On arrondira à 10^{-4} près.

Exercice 11

Afin de réguler le trafic automobile, le maire d'une commune a décidé de régler les trois feux de la voie principale de manière à obtenir les résultats suivants :

- 80 % des automobilistes doivent s'arrêter au premier feu ;
- 30 % des automobilistes doivent s'arrêter au second feu ;
- 65 % des automobilistes doivent s'arrêter au troisième feu.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux auxquels s'arrête un automobiliste pris au hasard.

1. Justifier qu'on peut écrire $X = X_1 + X_2 + X_3$ où, pour tout $k \in \{1 ; 2 ; 3\}$, X_k est la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'automobiliste s'est arrêté au feu k et 0 sinon.

2. Déterminer les lois de probabilité des trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3.

3. En déduire $E(X)$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 12

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher. À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac. Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus. Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4; 5; 1).
1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2.a. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
2.b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.
On note X1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché. Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X1,X2, et X3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.
3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X1
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X1
On note S = X1 + X2 + X3 la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.
5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer P(S = 24).
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
b. En déduire la probabilité de gagner un lot

Exercice 13

1. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20 . On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats. À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65% des étudiants soient récompensés ?
2. On interroge au hasard dix étudiants. Les variables aléatoires N1,N2,...,N10 modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615). Soit S la variable définie par S = N1 + N2 +··· + N10.
Calculer l'espérance E(S) et la variance V (S) de la variable aléatoire S.
3. On considère la variable aléatoire $M=\frac{S}{10}$.
a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
b. Calculer E(M) et V (M)

Exercice 14

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions. On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

• Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.

• La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients. On admet que son espérance E (Y1) est égale à 30 000 et que sa variance V (Y1) est égale à 100 000.
On note X2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée. On admet que X2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que Y2 = 50X2.
1. Calculer l'espérance E (X2) de la variable X2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
On note Y = Y1 + Y2 la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y1 et Y2 sont indépendantes. On note Z la variable aléatoire définie par $Z=\frac{Y}{1000}$.
2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice. Calculer son espérance E(Z) ainsi que sa variance V (Z)