Sommes de variables aléatoires – Fiche de cours

1. Variables aléatoires réelles (VAR)

a. Définition

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.
On appelle variable aléatoire réelle X une fonction définie de $\Omega \to \mathbb{R}$

b. Opérations

Nous étudierons les opérations suivantes avec des variables aléatoires :
- multiplication par un réel par exemple : λX
- somme de 2 variables aléatoires par exemple : X+Y

c. Loi de probabilité

On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la fonction qui à chaque valeur x_i associe la probabilité de l'événement $P(X = x_i)$

On peut résumer les résultats dans un tableau

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

2. Espérance mathématique / écart type

a. Espérance mathématique

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot x_k \qquad E(aX+b) = aE(X)+b \qquad E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

si E > 0 , l'expérience aléatoire est favorable
si E = 0 , l'expérience aléatoire est équitable
si E < 0 , l'expérience aléatoire est défavorable

b. Variance

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad V(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))^2 \qquad V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ pour X et Y variables indépendantes

$$V(aX) = V(aX+b) = a^2 V(X)$$

c. Ecart type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \quad ; \quad \sigma(aX) = \sigma(aX+b) = |a| \sigma(X)$$

3. Application à la loi binomiale

a. Définition

Deux variables sont identiquement distribuées lorsqu'elles ont la même loi de probabilités

b. Espérance mathématique

Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernouilli indépendantes et identiquement distribuées

c. Propriétés

Si X suit une loi de binomiale de paramètres n et p :

$$E(X) = np \qquad V(X) = np \cdot (1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

4. Echantillons de n variables aléatoires

a. Définition

Un échantillon de taille n est une liste de résultats obtenus pour n répétitions identiques et indépendantes.

b. <u>Propriétés</u>

Soit X une variable aléatoire de moyenne E(X), de variance V(X) et d'écart type σ_X

Soient n variables aléatoires X_1, X_2, ...X_n distribuées identiquement suivant la même loi de probabilité

On appelle M_n la moyenne de l'échantillon définie par :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots X_n}{n}$$

On appelle $E(M_n)$ espérance mathématique de la moyenne de l'échantillon définie par :

$$E(M_n) = E(X)$$

On appelle $V(M_n)$ la variance de la moyenne de l'échantillon définie par :

$$V(M_n) = \frac{V(X_1) + V(X_2) + \dots V(X_n)}{n^2} \quad ; \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

On appelle $\sigma(M_n)$ l'écart type de la moyenne de l'échantillon définie par :

$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$