Exponentielle de base e – Exercices – Devoirs

Exercice 1

Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est correcte. Pour les quatre questions traitées, indiquer sur la copie l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte, une réponse multiple, une absence de réponse, ne rapportent ni n'enlèvent de point.

La loi de refroidissement de Newton indique que la vitesse de refroidissement d'un matériau est proportionnelle à la différence entre la température θ (en degré Celsius) de ce matériau à l'instant t (en minute) et la température A constante de l'air ambiant.

Cela se traduit par la relation $\theta'(t) = \alpha(\theta(t) - \mathrm{A})$, où θ est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ modélisant la température du matériau en fonction du temps t, en prenant comme origine du temps l'instant où la pièce en acier est mise à refroidir.
La valeur du coefficient α, qui est négatif, dépend du matériau.

Une pièce en acier, initialement à la température de 600 °C, est mise à refroidir à l'air libre dans une pièce à 20 °C. Pour cet acier, α vaut $-0{,}1$.

***Pour l'ensemble des questions suivantes**, on admet que, sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$, la fonction θ est définie par :*

$$\theta(t) = 580\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} + 20.$$

2. La pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction θ au point d'abscisse 10 vaut :

a. $-\frac{58}{\mathrm{e}}$ **b.** $580\mathrm{e}^{-1} + 20$

c. $-\frac{58}{\mathrm{e}} + 20$ **d.** $\frac{580}{\mathrm{e}}$

3. Sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$, la fonction θ est :

a. croissante **b.** décroissante

c. croissante puis décroissante **d.** constante

4. La limite en $+\infty$ de $\theta(t)$ est :

a. 20 **b.** 580

c. $-\infty$ **d.** $+\infty$

La pièce peut être manipulée lorsque sa température devient inférieure à 40 °C. Pour déterminer la durée minimale d'attente (en minutes), à compter de l'instant où elle est mise à refroidir, on veut mettre en place un algorithme de balayage, écrit en langage Python.

```
1 from math import exp
2
3 def duree_d_attente():
4     t = 0
5     Temperature = 600
6     .................
7         t = t + 1
8         Temperature = 580 * exp(-0.1*t) + 20
9     return t
```

5. Pour que la valeur renvoyée par la fonction **duree_d_attente** soit la valeur entière minimale de la durée d'attente, la ligne 6 contient :

a. while t > 40 : **b.** while Temperature > 40 :

c. while Temperature < 40 : **d.** for i in range(Temperature) :

6. L'inéquation $\theta(t) \leq 40$, d'inconnue t, admet comme ensemble solution sur $[0\,;\ +\infty[$:

a. l'intervalle $\left[0\,; 10\ln\left(\frac{1}{29}\right)\right]$

b. l'intervalle $\left[-10\ln\left(\frac{1}{29}\right)\,; +\infty\right[$

c. l'intervalle $\left[0\,; \frac{10}{29}\right]$

d. l'ensemble vide (pas de solution)

Exercice 2

Une voiture électrique, dont l'accumulateur est totalement déchargé, est branchée à une borne de rechargement. L'énergie emmagasinée par l'accumulateur (en kilowattheure), notée E, peut être modélisée en fonction du temps t écoulé (en heure) par la fonction E définie pour $t \in [0; +\infty[$ par :

$$E(t) = 18(1 - e^{-0,45t}).$$

On admet que cette voiture a une énergie de stockage limitée à $18\ \text{kWh}$.

Déterminer l'instant t_0, arrondi à la minute, à partir duquel la moitié de cette énergie de stockage limite a été emmagasinée.

Exercice 3

L'étude proposée concerne un avion A320 d'environ 180 places.

Le taxiage est la période au cours de laquelle l'avion se déplace au sol, soit pour aller vers la piste de décollage soit pour aller vers son point de stationnement.

L'objectif du dispositif étudié est de permettre le déplacement autonome de l'avion au sol, sans utiliser ses moteurs principaux (réacteurs) mais des moteurs électriques.

Cette solution garantit une réduction des nuisances sonores et des émissions de CO_2.

L'utilisation des moteurs électriques diminue aussi fortement l'ingestion de corps étrangers (oiseaux) par les réacteurs sur le tarmac. La solution étudiée consiste en une motorisation électrique des deux trains principaux de l'avion (un moteur électrique par train). Lors des phases de déplacement au sol, l'avion est propulsé par ses moteurs électriques, au lieu de ses réacteurs.

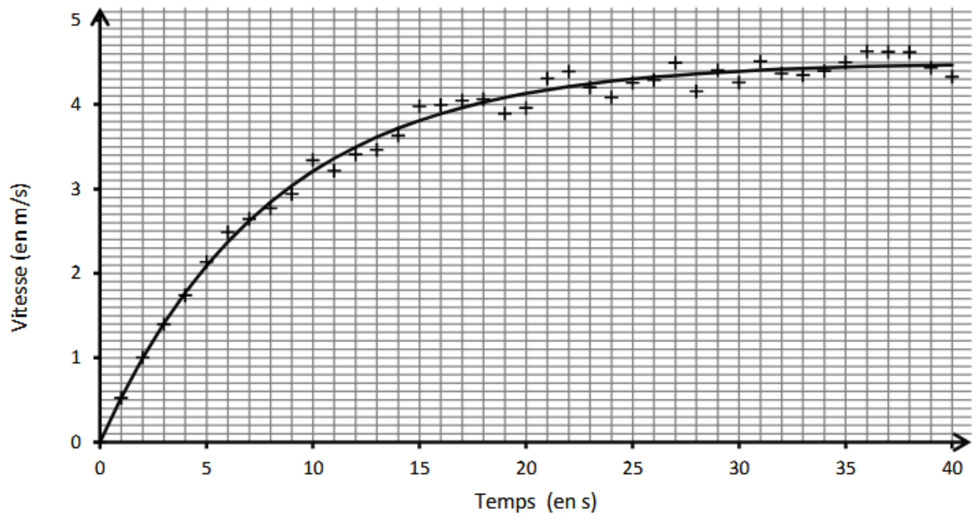
Toute l'étude est réalisée lors d'un taxiage avant un décollage sur sol horizontal en charge maximale.

L'avion, initialement à l'arrêt, démarre sur un sol horizontal et atteint une vitesse maximale $v_{\max}$. On modélise la vitesse de l'avion, exprimée en m·s^{-1}, par une fonction f définie sur $[0\,; +\infty[$ par $f(t) = A \times (1 - e^{-0,13t})$ où A est une constante réelle et t est le temps exprimé en seconde.

1. Exprimer en fonction de A, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

La représentation graphique de cette fonction est donnée sur le graphique ci-après. Elle modélise les valeurs expérimentales représentées par des croix sur ce graphique.

Évolution de la vitesse de l'avion lors du taxiage



2. Conjecturer la valeur de A à l'aide du graphique.

La vitesse de l'avion, exprimée en m·s^{-1}, est modélisée par la fonction v définie sur $[0\,; +\infty[$ par $v(t) = 4,5 \times (1 - e^{-0,13t})$. On admet que v est dérivable sur $[0\,; +\infty[$ et on note v' la dérivée de v.

3. Montrer que $v'(t) = 0,585 \times e^{-0,13t}$. En déduire l'accélération initiale de l'avion.

Exercice 3

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x)=3e^x+x$ b) $f(x)=xe^x$ c) $f(x)=\dfrac{1}{e^x+3}$ d) $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x+2}$ e) $f(x)=(3x^2+x)\,e^x$

f) $f(x)=(e^x+x^2)^2$ g) $f(x)=e^x\cos(2x)$ h) $f(x)=\dfrac{3}{2e^x-1}$ i) $f(x)=e^{3x+2}$ j) $f(x)=5e^{-x+3}$

k) $f(x)=xe^{3x}$ l) $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x-1}}$ m) $f(x)=e^{x^2+1}$ n) $f(x)=\cos(2x)e^{3x}$ p) $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^{-x}-1}$

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes, et interpréter graphiquement le résultat, en terme d'asymptote, lorsque cela est possible :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}+e^x+3x$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}+e^x+5x^3$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 10-e^{-0,1x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2}+e^x$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{15}{1-e^{1-x}}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^x+3}{e^{-3x}}$

Exercice 5

Résoudre : a) $e^22x+1=3$ b) $e^{-3x+2}=0$ c) $e^{2x+1}=e^{-x-1}$ d) $\dfrac{e^{3x-2}}{e^{2x+5}}=1$

e) $e^{x^2+5x-5}=e$ f) $e^{6x-1}=5$ g) $e^{3x}-2>1$ h) $\dfrac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}}>0$ i) $\dfrac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}}>6$

Exercice 6

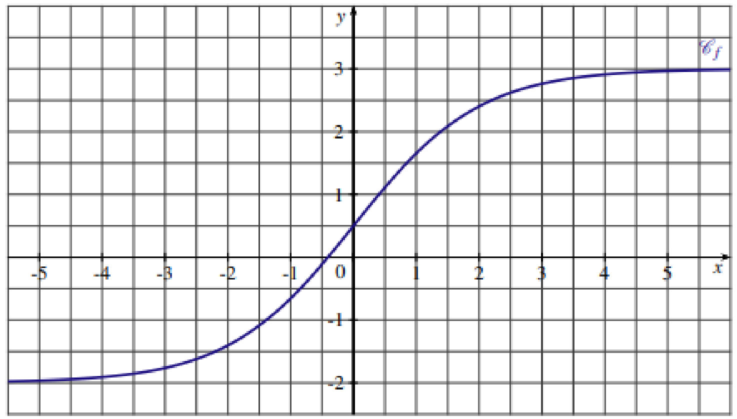
Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{3x}-6x+5$.

Exercice 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x\times e^{-4}=(e^x)^4$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(e^x+1)\times\left(e^{2x}-2\right)\geqslant 0$.

Exercice 8

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{3e^x-2}{e^x+1}$.



PARTIE A

1. Calculer $f(-\ln 4)$ et $f(\ln 4)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$.

PARTIE B

1. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=3-\dfrac{5}{e^x+1}$.
   b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. La courbe C_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3-f(x)\leqslant 0{,}001$.
   En déduire une valeur approchée au millième près de $f(9)$.

PARTIE C

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 10

a. Résoudre dans **R** l'équation $e^{-0,0434\,x} = 0,01$. On donnera la valeur exacte de la solution.

b. Un signal de puissance initiale $P(0) = 6,75$ mW parcourt une fibre optique. La puissance du signal, exprimée en mW, lorsque celui-ci a parcouru une distance de x kilomètres depuis l'entrée est donnée par $P(x) = 6,75\,e^{-0,0434\,x}$.

Quelle est la distance parcourue par le signal lorsque celui-ci aura perdu 99 % de sa puissance ? On arrondira le résultat obtenu au kilomètre.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 2] par :

$$f(x) = x + e^{x} - \frac{1}{x}.$$

On a tracé dans le repère orthonormé ci-contre la courbe représentative C_f de la fonction f.

On considère les points A(1 ; 0) ; B(2 ; 0) ; C(1 ; 2) ; D(2 ; 8) ; E(1 ; 3) et F(2 ; 9).

On admet que la courbe C_f est au-dessus du segment [CD] et en dessous du segment [EF].

a. À l'aide du graphique, donner un encadrement d'amplitude 1 de l'intégrale :

$$\int_1^2 f(x)\,dx.$$

b. Calculer la valeur exacte de $\int_1^2 f(x)\,dx$.