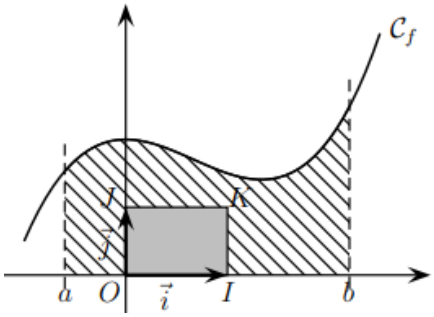
Intégration – Fiche de cours

1. Aire et intégrales

a. Fonction positive

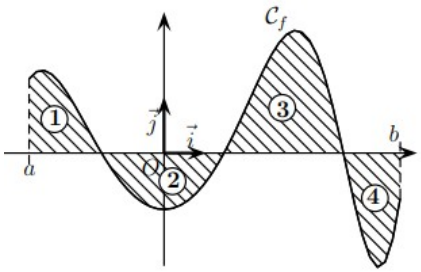
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a; b]
L'aire du domaine D délimité par la courbe Cf , l'axe des abscisses, et les droites d'équations x = a et x = b est appelée $\int_a^b f(x)\,dx$



b. Fonction continue

Pour une fonction f quelconque (continue mais pas forcément positive), l'intégrale de f sur [a; b] est l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
L'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire}\,(\mathcal{D}_1) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_2) + \text{aire}\,(\mathcal{D}_3) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_4)$$



c. Aire d'un domaine compris entre 2 courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a; b]
L'aire du domaine délimité par les courbes représentatives Cf et Cg de f et g et les droites d'équations x = a et x = b est définie par :

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

2. Propriétés de l'intégrale

- Existence d'une intégrale sur un intervalle

Toute fonction continue sur [a ; b] admet une intégrale sur cet intervalle.

- Permutation des bornes

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

- Relation de Chasles

Soit une fonction f continue sur un intervalle I. Pour tout nombre a, b et c de I, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Linéarité

Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I. Pour tous nombres réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

- Positivité

Soit une fonction f continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a et b de I tels que $a \leq b$. Si $f \geq 0$ sur [a ; b], alors :
$f(x) \geq 0$

- Ordre d'intégration

Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I pour tous nombres réels a et b de I tels que $a \leq b$. Si f g sur I, alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- Valeur moyenne

Sur un intervalle [a ;b] : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

- Primitive et intégrale

Une intégrale est définie par la relation :

$$A = \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

3. Intégrales et primitives

a. Primitive des fonctions de références

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

b. Opération des primitives

Fonction	Primitive	Intervalle
$f = u + v$	$F = U + V$	$D_u \cap D_v$
$f = u'.u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$	D_u
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$D_u \cap u > 0$
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$	$D_u \cap u \neq 0$
$f = u'.e^u$	$F = e^u$	D_u
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln\lvert u\rvert$	$D_u \cap u \neq 0$
$f = u' \sin u$	$F = -\cos u$	D_u
$f = u' \cos u$	$F = \sin u$	D_u