Fonction logarithme népérien – Exercices – Devoirs

Exercice 1

Exprimer en fonction de ln(3) les expressions suivantes :

$A = 2\ln(9) - 5\ln(3)$ $\quad B = 3\ln\left(\frac{1}{9}\right) + 2\ln(27)$

$C = \ln(81) - 3\ln(27)$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- $\ln(x - 4) > 0$ $\quad \ln(8x - 4) = 1$
- $\ln(x^2 + 4) > \ln(5x)$

Exercice 3

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur $]0 ; +\infty[$.

- $f(x) = 5x - 2\ln(x)$ $\quad g(x) = 2x^3\ln(x)$
- $h(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x}$

Exercice 4

On considère la fonction g définie sur $]0 ; 10]$ par $g(x) = x - 3 - 2\ln(x)$.

1. Déterminer la limite en 0 de g. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_g$?

2. Calculer la dérivée g' de g.

3. Déterminer le signe de g' sur $]0 ; 10]$.

4. En déduire le tableau de variation de g.

5. Donner à 10^{-2} près, à l'aide de la calculatrice, les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

Exercice 5

On considère l'équation : $3\ln(x) - \ln(x+30) = 2\ln(5)$, où x appartient à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Donner, parmi les quatre propositions suivantes, la solution de cette équation.

a. 0 $\quad$ b. e^{-5}

c. 10 $\quad$ d. 20

Exercice 6

on admet que, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ *, la fonction* θ *est définie par :*

$$\theta(t) = 580\,e^{-0{,}1t} + 20.$$

L'inéquation $\theta(t) \leq 40$, d'inconnue t, admet comme ensemble solution sur $[0 ; +\infty[$:

a. l'intervalle $\left[0 ; 10\ln\left(\frac{1}{29}\right)\right]$ $\quad$ **b.** l'intervalle $\left[-10\ln\left(\frac{1}{29}\right) ; +\infty\right[$

c. l'intervalle $\left[0 ; \frac{10}{29}\right]$ $\quad$ **d.** l'ensemble vide (pas de solution)

Exercice 7

1. Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln(2025) = 4\ln(3) + 2\ln(5).$$

2. Simplifier le nombre A ci-dessous en détaillant les calculs :

$$A = 2\ln(e^4) - 3\ln\left(\frac{1}{e}\right).$$

Exercice 8

PROPOSITION 1 : $\ln 10000 - \ln 0{,}1 + \ln 0{,}01 = 3\ln 10$.

PROPOSITION 2 : La solution de l'équation $2\ln x = 1$ est $\frac{e}{2}$.

PROPOSITION 3 : L'équation $2\ln x = \ln(4x-3)$ admet une seule solution $x = 1$.

PROPOSITION 4 : L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln\frac{1}{x} - \ln x \geqslant 0$ est l'intervalle $]0;1]$.

PROPOSITION 5 : La fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = \ln\left(x^3\right) - 2$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x}$.

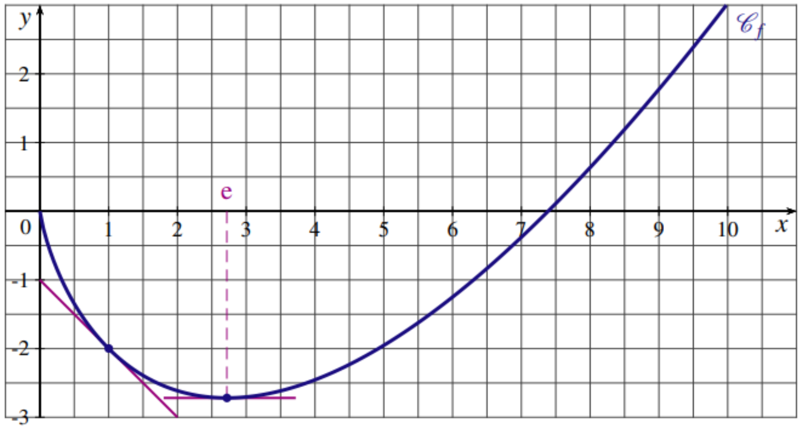
Exercice 9

La fonction f est définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x(\ln(x) - 2)$.

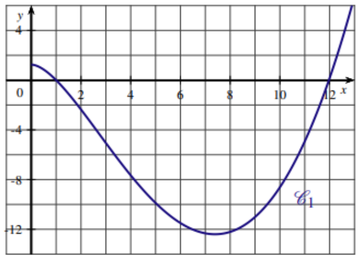
1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. a) Calculer la limite de la fonction f en 0.
   b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ on a $f'(x) = \ln(x) - 1$.
4. a) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x.
   b) Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e^2.

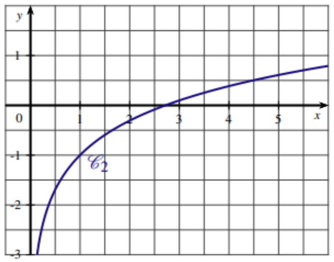
Exercice 10

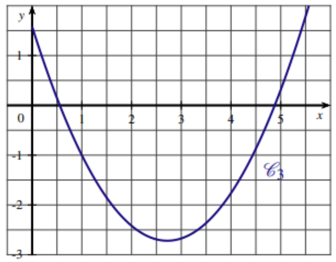
On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.



1. On note f' la dérivée de la fonction f.
   Par lecture graphique, déterminer $f'(1)$ et $f'(e)$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée f' de la fonction f et une autre d'une primitive F de la fonction f.
   Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F. Justifier la réponse.







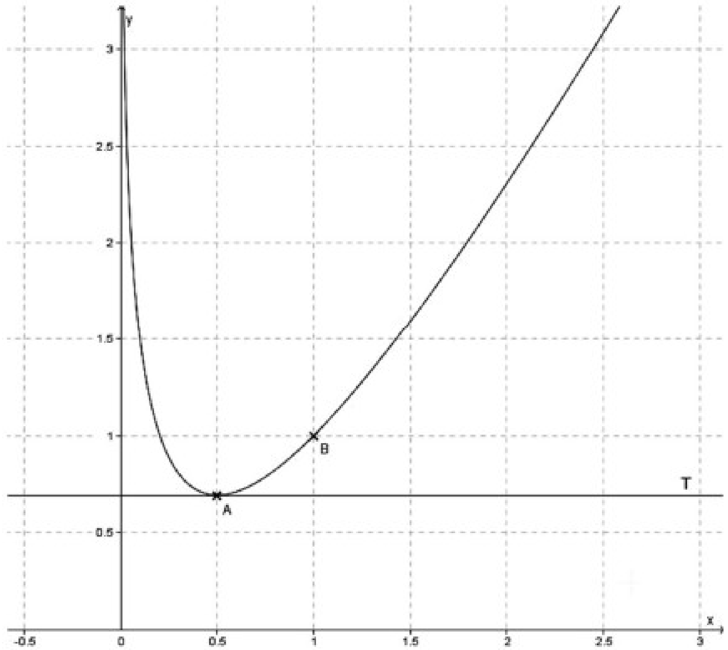
Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = ax + b - \ln(x)$ où a et b sont des nombres réels. On note C_f la courbe représentative de f tracée dans le repère ci-dessous.

On note A le point d'abscisse 0,5 appartenant à la courbe C_f.

On note T la tangente à la courbe C_f au point A. La droite T est parallèle à l'axe des abscisses.

Le point B(1 ; 1) appartient à la courbe C_f.



a. Donner la valeur de $f(1)$. En déduire une relation entre a et b.

b. Justifier que $f'(0,5) = 0$. En déduire la valeur de a.

c. En déduire la valeur de b.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \ln(x)$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x}$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ en faisant figurer la valeur exacte de son extremum. On précisera les limites aux bornes de l'intervalle.